Contenido

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

NOTAS DE CLASE Y REFLEXIONES

RESEÑA

De libro

Dirección editorial: Clemente Merodio López
Investigación y desarrollo: Armando Sánchez López
Editora responsable: Alicia Ávila Storer
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo:
04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Suscripción y ventas: Laura Hernández
Avenida Universidad 767, México, D.F., 03100
Tel. 52 + (55) 5420-7530, ext. 2463
gabih@santillana.com.mx

www.santillana.com.mx

Fecha de edición: agosto de 2005.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 3012.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Editorial

En esta época, en la que nos inundan las noticias de los bajos rendimientos de los estudiantes de distintos países en las evaluaciones internacionales, la opinión pública suele considerar a las autoridades como totalmente responsables de esta situación. No obstante, por lo general la opinión pública carece de los elementos necesarios para considerar, de una manera que no sea ingenua, las cuestiones relacionadas con el problema del aprendizaje de las matemáticas por los alumnos. Es un compromiso de la comunidad dedicada a la investigación en la enseñanza de las matemáticas proveer al público de información detallada y profunda sobre los diversos aspectos que yacen en el fondo de dicha problemática. Por ello, cada vez se hace más necesario diversificar las investigaciones, que inicialmente se centraron sólo en los aspectos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas, hacia los diversos actores y factores que en él intervienen. Entre las interrogantes que pueden plantearse en esta nueva etapa de la investigación educativa, siguen siendo importantes las que versan sobre las dificultades de los alumnos para aprender los distintos conceptos matemáticos, pero deben complementarse con cuestionamientos sobre lo que ocurre en el aula, lo que sucede con los procesos de formación de maestros e incluso con los de los encargados de la preparación de los maestros; también en los aprendizajes de los alumnos. Cuando la comunidad se aproxime desde distintos ángulos al problema, el público contará con información confiable sobre la cual reflexionar.

En este número de *Educación Matemática* se encuentra un abanico de artículos que muestra cómo se pueden abordar desde el punto de vista de la investigación los distintos elementos que entran en juego en el aprendizaje significativo de las matemáticas. Si bien los estudios sobre el aprendizaje de conceptos específicos siguen ocupando un lugar preponderante en las investigaciones, las nuevas tendencias apuntan a una diversificación de las miradas hacia otros elementos del proceso educativo y hacia su interrelación.

A través de la exploración del potencial didáctico para el aprendizaje de la noción de fracción y mediante una metodología de microingeniería didáctica, en el artículo de Block y González Tovar se muestra cómo el diseño de una serie de situaciones probadas con alumnos de quinto año de primaria puede dar resultados positivos cuando se trata de la división de una fracción unitaria entre un entero, y de las limitaciones del acercamiento cuando se intenta que los alumnos trabajen con división de fracciones no unitarias. En el caso de la sustracción, Flores se enfoca en la relevancia de los algoritmos en la solución de problemas. La autora sigue la evolución de las representaciones de un problema que resuelven dos alumnas de tercer año de primaria, con especial atención al papel de los conceptos. La autora muestra que la determinación del contexto en el que se puede utilizar un algoritmo específico es un problema complejo, en el que están implicados aspectos como el reconocimiento de la validez del problema y la preferencia por otras estrategias de solución. Estos factores están determinados por la existencia de un vínculo entre el algoritmo y la comprensión del problema y por la existencia de obstáculos conceptuales que dificultan esta vinculación.

El gusto o rechazo por las matemáticas se puede entender, desde la perspectiva de Hidalgo, Maroto y Palacios, mediante el triángulo actitud-emoción-destreza que incluye las variables emocionales que actúan en conjunto como un factor decisivo en la percepción de esta disciplina. Los autores construyen con ellas un perfil matemático que se desarrolla desde las experiencias de los estudiantes en la escuela primaria y se consolida en la escuela secundaria. Encuentran que la proporción de alumnos con perfil *antimatemático* crece notablemente conforme avanzan en el proceso escolar y atribuyen a la dificultad intrínseca de las matemáticas y a su carácter acumulativo el papel de ser el elemento generador del fracaso de los estudiantes en los primeros niveles educativos. Sugieren, además, la inclusión sistemática de objetivos escolares encaminados a la alfabetización emocional de los estudiantes de los niveles elementales como una primera acción para su orientación hacia la aceptación de las matemáticas.

Si bien es fundamental continuar con las investigaciones sobre las dificultades y la manera de aprender de los estudiantes, la investigación acerca de los profesores y maestros en formación es esencial para entender sus concepciones de las matemáticas y de su enseñanza, así como sus dificultades conceptuales. Los estudios recientes señalan que ellos presentan, en ocasiones, concepciones semejantes a las de sus alumnos y que desconocen los resultados de las investigaciones en matemática educativa. Los maestros no cuentan con los elementos necesarios para cambiar su práctica docente y adoptar estrategias de enseñanza más cercanas a las que se sugieren en los enfoques de los planes y programas recientes en distintos lugares del mundo. En este sentido, en el artículo de Guillén se presenta una propuesta para tratar el tema de la clasificación de sólidos con estudiantes de magisterio. La autora señala la importancia de considerar la actividad matemática que surge a partir de una situación como un criterio de decisión de su inclusión en una propuesta para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y cómo la actividad de clasificación desempeña un papel fundamental en las matemáticas, pero está poco representada en las clases de matemáticas.

A pesar de su importancia, la investigación acerca de los formadores de maestros ha recibido muy poca atención por parte de los investigadores en educación matemática. Los formadores de maestros no necesariamente están al tanto de la investigación en matemática educativa, ni de la necesidad de los futuros maestros de conocer formas alternas para trabajar en el aula los contenidos que deben enseñar y que han probado ser exitosas no sólo en los proyectos de investigación, sino en la actividad cotidiana de algunos maestros. Robert y Pouyanne consideran, en el artículo contenido en este volumen, que la formación de maestros, tanto en el caso de la formación inicial como en el de la formación continua, es una profesión que debe aprenderse. Señalan, además, la necesidad de establecer programas organizados para la capacitación de formadores de maestros. Para estos autores es indispensable que los formadores aprendan maneras de enseñar a los maestros a trabajar en aspectos específicos de su labor, tales como el trabajo con alumnos con deficiencias, las estrategias de evaluación o el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, de modo que los maestros puedan enriquecer sus prácticas y encontrar nuevas respuestas a nuevas preguntas mediante la actualización. Puesto que los programas para formar maestros implican una doble transposición didáctica, de la investigación a la formación de formadores y de ésta a la formación de maestros, sugieren el diseño de estrategias distintas para la formación inicial y para la formación continua.

Creemos que el contar con un mayor número de trabajos de investigación de calidad que arrojen luz sobre los distintos aspectos involucrados en la enseñanza de las matemáticas permitirá una mayor comprensión de este interesante proceso. Los actores involucrados en esta difícil tarea contarán así con elementos sobre los cuales puedan tomar decisiones importantes para su práctica y el público contará también con más elementos para construir su opinión.

POST SCRÍPTUM

En el tiempo de existencia de esta publicación han transitado diversos miembros y estados de ánimo por el Comité Editorial. Varios colegas, por diversas causas, se han visto obligados a dejar de participar, pero son compañeros que podemos visitar o con quienes podemos compartir diferentes momentos. Sin embargo, ya no podemos gozar la compañía y colaboración de algunos. Hace ya varios años, cuya cuenta la parte sana de la memoria conserva en el olvido, pasamos un momento difícil: el fallecimiento en un accidente de nuestra querida Elfriede Wenzelburger, quien ayudó a fundar la revista y la coordinó varios años desde su inicio. Su inesperada e irreparable pérdida obligó al Comité a reunirse y por primera vez conversar sobre la continuidad de la revista y sobre la coordinación, actividad que sabíamos no era fácil y requería de mucha voluntad, liderazgo y tiempo de dilación no remunerado. Por unanimidad nombramos a Guillermina Waldegg quien, a pesar de tener un papel protagónico en la comunidad de investigadores educativos, asumió la coordinación de la revista. A lo largo de su coordinación le dio un importante impulso a la revista y logró gestionar con éxito la difícil transición de casa editorial.

Después de algunos años, tuvo que abandonar el proyecto debido a una grave enfermedad, la cual combatió con impresionante energía, entereza y valor, pero que lamentablemente la consumió.

Guillermina, una de las primeras investigadoras en obtener el grado de doctor en la especialidad de Matemática Educativa en nuestro país, se consolidó profesionalmente por su esfuerzo y productividad constante, participó en reuniones académicas nacionales e internacionales, publicó varios artículos que son citados en diversos trabajos y también se ocupó de la docencia. Esto la condujo a ser considerada para responsabilidades relevantes como la coordinación de la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, la presidencia del Consejo Mexicano de la Investigación Educativa, además de otros cargos en la estructura ejecutiva de dicha asociación. Fue miembro del Sistema Nacional de Investigadores e incansable organizadora de actividades académicas.

Más allá de sus logros y méritos académicos, cabe destacar que Guillermina fue un ser humano en toda la extensión de la palabra: afectuosa, amable, solidaria, conciliadora y tolerante. La tristeza nos embarga nuevamente, pero a la vez su recuerdo nos impone un reto, nos compromete a seguir su ejemplo y a fortalecer lo que inició. Nos llena de energía para continuar con nuestra labor editorial para mantener su presencia en el ámbito que compartíamos.

El Comité Editorial se une a la pena que embarga a la familia de la doctora Guillermina Waldegg a quien ofrecemos nuestros mejores deseos para que el desaliento pase pronto. Deben tener la certeza de que la huella de Guillermina es profunda y seguirá con nosotros y con todos aquellos comprometidos con las causas que abanderó. Descanse en paz.

El Comité Editorial

El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas

Rosa del Carmen Flores Macías

Resumen: Un marco de referencia para comprender el papel que desempeñan los procesos cognitivos de los alumnos para aprender el significado de los algoritmos en la solución de problemas puede ser útil para crear situaciones de enseñanza que los ayuden a comprender el vínculo algoritmo-problema. En este trabajo, se analizan las actuaciones de dos alumnas de tercer grado al solucionar problemas en los que se puede aplicar el algoritmo de la sustracción. Los resultados se discuten considerando un modelo para analizar la evolución en la representación del problema, en el que se considera el tránsito desde una representación no canónica del problema hacia una representación canónica algorítmica. En este modelo se pone especial énfasis en el papel que desempeñan los conceptos.

Palabras clave: problema, algoritmo, concepto, esquema, representación.

Abstract: Having a frame of reference to understand the role played by student's cognitive processes while learning the meaning of algorithms in problem-solving can be useful to create teaching situations that help them understand the "algorithm-problem" relationship. In this paper, we analyze the performance of two students working with problems in which the subtraction algorithm can be applied. Results are discussed considering a model that analyzes how problem representation evolves, considering the transit from a non-canonical to an algorithmic canonical representation. This model emphasizes the role played by concepts.

Keywords: problems, algorithm, concept, scheme, representation.

Fecha de recepción: 4 de enero de 2005.

INTRODUCCIÓN

Los algoritmos son una de las herramientas culturalmente desarrolladas que más ha contribuido a que la gente común y corriente resuelva con mayor eficiencia problemas matemáticos que enfrenta o se plantea en su vida diaria; y precisamente esta necesidad fue la que dio lugar a su invención y desarrollo. La versión moderna de los algoritmos para la adición, sustracción, multiplicación y división tuvo sus orígenes en el trabajo del sabio árabe Mohamed ibn Musa Al'khwarizmi (780 a 850 d.C.), que integró tres conocimientos centrales: la numeración hindú, el valor posicional y el cero.

No obstante lo transcendente que hoy día nos parece su invención, pasaron muchos siglos para que el algoritmo se volviera un conocimiento universal. Dantzing (1971) narra la historia de un comerciante del siglo XV que, queriendo dar a su hijo la mejor educación, enfrenta la disyuntiva de enviarlo a una universidad en Alemania para adquirir sólo conocimientos sobre adición o sustracción o a Italia para, además, adquirir conocimientos sobre la multiplicación y la división, pues en aquella época se requerían estudios muy especializados, razonamientos complejos y cálculos complejos para solucionar problemas cotidianos empleando algoritmos. Dantzing refiere que, para que en la Europa del siglo XV se aceptaran los algoritmos, hubo que vencer prejuicios y cambiar ideologías que favorecieron su desarrollo hasta alcanzar su versión actual. El hecho que más contribuyó a su adopción fue que era una herramienta más eficiente que otras formas de cálculo para resolver problemas en actividades como: realizar transacciones de compra y venta, preparar alimentos, distribuir un presupuesto, programar viajes, etc.; actividades que tanto en el pasado como hoy día realiza una persona común.

Al conocer la historia de esta herramienta que se desarrolla gracias a su utilidad en muy diversas situaciones, es una paradoja que en nuestras escuelas los alumnos aprendan la herramienta, pero no dónde emplearla. Más bien que mal, la gran mayoría de los alumnos aprenden a sumar, restar, multiplicar y dividir, pero muestran un conocimiento limitado de su aplicación a problemas de la vida diaria. Esta situación, desde luego, está muy relacionada con la manera como se enseñan los algoritmos en las escuelas.

Tratando de que los algoritmos sean una herramienta útil, su enseñanza ha estado sujeta a varias reflexiones y consideraciones. Se ha visto que el ejercicio aislado y repetitivo no favorece que el alumno aprenda a utilizarlos, por lo que se ha propuesto su aprendizaje en el contexto de la solución de problemas. En

México, la Secretaría de Educación Pública (2002) plantea el desarrollo de la competencia general siguiente: "selecciona la operación matemática que necesita para resolver un problema, la realiza convencionalmente y con la ayuda de la calculadora", y para tercer año, la competencia específica: "Al solucionar problemas comprende las reglas de suma y resta" y propone los siguientes indicadores: "resuelve problemas sencillos de suma y resta utilizando diversos procedimientos, uso de materiales, dibujos u operaciones"; "identifica cuando se resuelve un problema con una suma o una resta"; "reconoce que con el procedimiento de la suma o la resta se resuelve un problema más rápido"; "reconoce la relación entre suma y resta".

No obstante estos planteamientos, el problema de aprender dónde emplear la herramienta no se ha resuelto. Ávila, Block y Carvajal (2003) analizan el trabajo de diversos investigadores mexicanos que registran que, si bien la enseñanza de los algoritmos en el contexto de la solución de problemas se empieza a adoptar en las aulas, existen limitaciones: se pone mayor énfasis en el aprendizaje del procedimiento que en el significado del algoritmo; se concede un lugar privilegiado al algoritmo y hay dificultades para validar los procedimientos no algorítmicos; persisten prácticas como enseñar la definición del concepto (*v.g.* suma o resta), pasar a los ejercicios y luego a la aplicación para solucionar problemas; los profesores dan poca oportunidad a las soluciones espontáneas de los alumnos; los problemas tienen un formato tradicional y hay pocas posibilidades de un razonamiento complejo, y los profesores dirigen la actuación de los alumnos, pues son pocos los que reconocen en el error una oportunidad de aprendizaje. Por varias razones, estas prácticas conllevan dificultades, entre ellas:

1. Cuando no hay quien los dirija, los alumnos no logran reconocer cuál algoritmo emplear, en especial si los problemas plantean situaciones conceptualmente diferentes de aquéllas con las que han practicado.
2. Cuando se trabaja con problemas de un formato simple y con una baja complejidad conceptual, el nivel de conocimiento desarrollado es igualmente simple y la posibilidad de aplicación a una situación más compleja, común de la vida diaria, se limita.
3. Si el alumno no tiene oportunidad de probar sus procedimientos no algorítmicos, tampoco tendrá el espacio para descifrar la relación entre: los aspectos conceptuales del problema, los de su solución no algorítmica y los de la solución algorítmica. Este vínculo es esencial para entender el significado de la suma, la resta, la multiplicación y la división en el contexto de un problema.

4. Se promueven prejuicios que coartan la oportunidad de establecer un puente entre soluciones no algorítmicas, a la que los alumnos recurren espontáneamente, y una solución algorítmica, pues tanto maestros como alumnos consideran que aplicar las primeras es "hacer trampa". Si las llegan a usar, los alumnos lo hacen subrepticiamente, por lo que no hay oportunidad de discutir sus relaciones y diferencias.
5. La consecuencia final de esta manera de enseñar y aprender los algoritmos es que los alumnos terminan la educación básica entendiendo superficialmente su utilidad en la vida diaria.

Ante estas limitaciones, uno se pregunta: ¿Por qué persisten estas formas de enseñar los algoritmos? Parecería que quienes suelen encargarse de su enseñanza (padres, maestros) consideran que para que los alumnos entiendan el vínculo problema-algoritmo, basta con que conozcan el algoritmo apropiado y se prescriba su utilización en el problema. Esta creencia tiene como consecuencia que no se estimule el empleo de procedimientos no algorítmicos. Asimismo, parecería que se considera que si el alumno comprende el planteamiento del problema, comprende igualmente las implicaciones de su solución mediante un algoritmo. Las investigaciones de Carraher, Carraher y Schliemann (1991) documentan las consecuencias negativas de ambos supuestos; sin embargo, se requieren más pruebas que justifiquen por qué es necesario que los alumnos pasen por un proceso en el que se les estimule para buscar soluciones no algorítmicas. Además, se requiere proveer explicaciones sobre por qué el alumno, al comprender el planteamiento de un problema, no necesariamente comprende su solución algorítmica.

En este trabajo se pretende analizar el papel que desempeñan los conceptos en el entendimiento del vínculo problema-algoritmo. Se propone un modelo para analizar el proceso por el cual los alumnos perfeccionan la solución a los problemas hasta llegar a comprender la aplicación del algoritmo. El eje central del modelo es la adquisición de conceptos que llevan al alumno desde la asignación de un significado erróneo del problema hasta su comprensión canónica y el empleo de un algoritmo para su solución. Para tal fin se analizará el caso del algoritmo de la sustracción aplicado a la solución de problemas relativos a las situaciones aditivas.

El trabajo de Gerard Vergnaud brinda un marco de referencia psicológico para analizar y discutir esta cuestión. Vergnaud (1990) plantea que su teoría atiende a cómo el conocimiento matemático adquiere su significado a lo largo del desarrollo y en los diferentes contextos donde actúa el individuo. En su teoría se considera que el proceso de conceptuación es el eje de la organización de la acción en distintas situaciones y el mecanismo básico de la transformación y apropiación del conocimiento. Para analizar este proceso, Vergnaud se refiere a tres componentes centrales en su propuesta teórica: campo conceptual, esquema y representación.

CAMPO CONCEPTUAL

Vergnaud (1990, p. 23) define un campo conceptual como "un conjunto de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere algunas clases de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unos con otras". Asimismo, indica que la relación entre conceptos y situaciones es esencial, puesto que el campo conceptual "es un conjunto de *situaciones*, cuyo dominio requiere algunos conceptos interconectados. Al mismo tiempo, es un conjunto de conceptos con diferentes propiedades, cuyo significado se deriva de una variedad de situaciones" (Vergnaud, 1996, p. 225). La teoría de los campos conceptuales sitúa a los conceptos en el eje de la explicación de los procesos mediante los cuales un alumno da significado a un problema.

Para Vergnaud (1997a) los conceptos son los ejes rectores de la acción. La construcción del significado de los conceptos ocurre a lo largo del desarrollo, en interacción con situaciones cotidianas en las que el individuo aplica diferentes sistemas de representación lingüística y simbólica. En los siguientes párrafos se presenta un análisis de los tres conjuntos mediante los cuales el autor propone que deben estudiarse el desarrollo y operación de los conceptos:

1. *Las invariantes* son los significados que el individuo gradualmente domina en el transcurso de su desarrollo. Se refieren a las propiedades de los objetos, a sus relaciones y a las operaciones para su transformación. Al inicio del desarrollo, este conocimiento es implícito y constituye la base del conocimiento formal. Vergnaud (1990, p. 20) se refiere a él como *conceptos en acto* y *teoremas en acto* "que no pueden ser llamados 'conceptuales' ya que el conocimiento conceptual es necesariamente explícito". Las relaciones entre ambos son evidentemente dialécticas, los unos no pueden ser sin los otros (Vergnaud y Récopé, 2000).
2. *Las representaciones simbólicas, lingüísticas o gráficas* son mediadoras entre la actividad externa y la actividad interna del individuo en las situaciones matemáticas. A la vez que se utilizan como herramientas del pen-

samiento durante la acción, derivan su significado de la acción en diversas actividades. Por ello, en el desarrollo del conocimiento relativo a los sistemas simbólicos se resalta tanto el papel mediador de la cultura como el del proceso epistémico (Carraher, Carraher y Schliemann, 1991).

3. *Las situaciones* son los eventos que dan significado a la relación entre *invariantes y simbolizaciones* e involucran objetos, propiedades de los objetos y relaciones entre ellos. Las *situaciones* constituyen el marco de referencia para identificar y clasificar los problemas desde el punto de vista matemático.

Además de sus ideas acerca del campo conceptual y del concepto, Vergnaud plantea la noción de esquema para explicar cómo se articula la actividad en el proceso de dar significado a un problema.

ESQUEMA

Recuperando el trabajo de Piaget, Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) considera que el esquema es una forma invariante de organización de la actividad, cuya función primaria es generarla a medida que se actúa en una situación. Los avances en la situación son resultado de la acción del alumno, del efecto de la dinámica propia de la situación independiente del alumno o del efecto de ambos. Vergnaud plantea las siguientes propiedades del esquema:

a) Se relacionan con todas las formas de la actividad: acciones, juicios y razonamientos intelectuales. Estas manifestaciones son distintas pero rara vez independientes, lo que da lugar a un enriquecimiento de los esquemas en el curso de la experiencia, por su descubrimiento, combinación, diferenciación y reestructuración.

b) Poseen una función asimilatoria que es esencial. Ante situaciones u objetos nuevos, los esquemas formados para situaciones conocidas son evocados y probados. Los esquemas evocados permiten interactuar con la situación nueva y esclarecer su relevancia para aprender algo sobre ésta. Puede suceder que ocurra una asimilación de la nueva situación, pero también que el esquema evocado no se ajuste y sea necesario un proceso de acomodación para separar y recombinar los componentes del esquema existente o construir nuevos esquemas. En virtud de ambas propiedades, el esquema se propone como la estructura básica para entender las continuidades y discontinuidades que ocurren en el proceso de construcción y adaptación del conocimiento (Brun, 1996). Al comprender un problema, el alumno organiza su actividad conforme a determinado esquema, pero en el curso de la actividad, éste puede ser sustituido, reconformado o creado en función de su relación con los esquemas que dieron lugar al entendimiento original del problema.

Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) indica que, para entender el funcionamiento de los esquemas al dar significado a un problema, es necesario considerar sus componentes estructurales. Por separado, los componentes no son funcionales, pero en conjunto, vuelven al esquema una *totalidad dinámica y funcional*. Éstos son: propósitos, reglas de acción; invariantes operacionales e inferencias. *Grosso modo*, en el contexto de la comprensión y solución de un problema, la definición de cada componente sería:

Los propósitos se refieren, según sea la situación de que se trate, a la intención, la motivación, el deseo, la necesidad. Al solucionar un problema, los individuos anticipan la meta del problema según un entendimiento; establecen y modifican sus planes conforme a la concordancia de las acciones con los resultados esperados; replantean su interpretación y resultados esperados.

Las invariantes (a las que ya se había hecho referencia) son la parte directamente epistémica del esquema; tienen la función de: reconocer los objetos matemáticos, sus propiedades, sus relaciones y las transformaciones que estos objetos experimentan; extraer y seleccionar la información pertinente; inferir las consecuencias útiles para la acción y controlar la toma de información posterior. Es, por tanto, una función de conceptuación y de inferencia (Vergnaud y Récopé, 2000).

Las inferencias llevan al individuo a decidir qué información considerar y a adaptar su actividad en un problema, pero lo más importante, es que lo llevan al entendimiento de las relaciones entre conceptos y teoremas relacionados con el entendimiento del problema y su solución.

Las reglas de acción son la parte propiamente generativa del esquema, guían la toma de información y la regulación de la actividad. Las reglas de acción son la puesta en práctica de los teoremas en acto. No engendran tan sólo la acción, sino toda la actividad mental que no es directamente observable, como es el caso de las inferencias.

Si se tienen en cuenta estos cuatro componentes del esquema, se puede comprender cómo la actuación de un alumno ante un problema puede ser sistemática y contingente (Vergnaud y Récopé, 2000). Sistemática, porque en cada situación las acciones del alumno no son fortuitas, obedecen a un entendimiento del problema y a un propósito en su solución (sean éstos correctos o no). Contingente, porque estas acciones se deciden anticipando lo que se considera que es apropiado y se debe hacer en la situación. Si se da el caso de que el alumno no conozca el esquema apropiado, ensayará alternativas y lo construirá a partir de los existentes.

Si se consideran sus componentes estructurales, se verá que los algoritmos son esquemas, pues según Brun (1996), comprenden conceptos y teoremas en acto, propósitos, reglas de acción e inferencias. En el caso particular del algoritmo de la resta, sus componentes implican entendimientos acerca del sistema decimal, las relaciones entre los números que llevan a la acción de decrementar, así como la coordinación con otros significados que lo relacionan con diversas situaciones (transformaciones, comparaciones, combinaciones, etc.). De esta manera, el esquema, como organización invariante de la actividad, se utiliza de manera flexible y adaptándose a diversos problemas.

La explicación de Vergnaud del esquema nos acerca al entendimiento de la relación entre el problema y el individuo que le da significado y actúa en consecuencia. No obstante, queda por explicar cómo es que se coordinan y articulan los esquemas, que son parte del proceso de dar significado y solucionar un problema. El concepto de *representación* como conjunto de esquemas sirve para este fin.

REPRESENTACIÓN

Vergnaud (2000; Vergnaud y Récopé, 2000) propone una concepción de la *representación* que permite, en particular, analizar la organización y operación de los esquemas que se elaboran durante la experiencia. La relevancia de la representación para la acción en el problema es evidente en el trabajo de Vergnaud (1987) desde la manera como la concibe. Él la explica en términos de la relación de tres elementos: referente, significado y significador:

> El *referente* es el mundo real tal y como se le presenta al alumno a lo largo de su experiencia. El mundo es cambiante y el alumno actúa sobre él para producir eventos y efectos que le complacen o que están de acuerdo con sus expectativas y representaciones, conscientes o inconscientes.
>
> El *significante* está en el corazón de la teoría de la representación, en el sentido de que es en este nivel donde se reconocen las invariantes, las inferencias perfiladas, las acciones generadas y las predicciones hechas.

> El *significador* consiste en diferentes sistemas simbólicos que están diferencialmente organizados... Es esencial reconocer que los símbolos empleados en la comunicación están en el ámbito de los significadores, mientras que los significados están en el ámbito de los significantes (p. 229).

Vergnaud (Vergnaud y Récopé, 2000) reconoce tres entendimientos de la representación que son parte de la literatura psicológica y que se corresponden con los elementos antes descritos y un cuarto entendimiento que integra los anteriores:

1. Como flujo de conciencia. Mediante la percepción y la imaginación que contribuyen a la identificación de los objetos, sus propiedades y sus relaciones.
2. Como un sistema de invariantes. Los significados relativos a conceptos en acto y teoremas en acto que permiten pensar y actuar en la realidad.
3. Como un sistema de signos y símbolos. Que median la comunicación y el pensamiento. En este sistema es esencial el vínculo entre los invariantes y el leguaje natural.
4. Como un ensamble de esquemas que, al ser integrados, organizan la actividad y permiten:
   a) Simular la realidad y anticiparla. El alumno, mediante su conocimiento de conceptos y principios matemáticos y su conocimiento acerca de representaciones gráficas, lingüísticas y simbólicas, simula los eventos y relaciones expresadas en un problema y anticipa su comportamiento en la solución.
   b) Organizar y dirigir la actividad. A partir de la representación, en la solución de un problema los alumnos establecen propósitos, deciden cambios, hacen ajustes, dilucidan inferencias, etcétera.

Los esquemas por separado no logran dar cuenta de los aspectos anteriores. Pero la articulación de esquemas en una representación logra que ésta simule, organice y dirija la actividad.

En el transcurso de la actividad, los esquemas se transforman o son sustituidos y dan lugar a nuevas relaciones entre esquemas. En este sentido, se plantea que la representación es al mismo tiempo producto de la acción, pues gracias a la experiencia sobre las situaciones, los alumnos aprenden formas más complejas y eficaces de representación (Vergnaud y Récopé, 2000).

Las nociones integradas de campo conceptual, esquema y representación constituyen un campo de referencia para explicar cómo se logra dar un significado a un problema y cómo se actúa para solucionarlo. La noción de campo conceptual explica la relación entre entramados de conceptos que se activan al entender los argumentos de un problema y al entender su solución. La noción de esquema atiende a la organización de la actividad del alumno, a cómo planifica, organiza, decide sus acciones e integra y adapta sus conocimientos en la solución de un problema. Finalmente, la noción de representación explica cómo el alumno simula, anticipa y actúa sobre el problema, poniendo en juego sus conocimientos acerca de conceptos y esquemas que median entre el entendimiento y la solución de éste.

En un trabajo anterior (Flores, 2003) se adoptó la propuesta de Vergnaud para comprender y analizar de manera integrada los esquemas que constituyen la representación de distintos problemas de suma y resta. Se propuso que, en la representación de un problema, están contenidos los esquemas que forman parte de su entendimiento y de su solución. Asimismo, se planteó la necesidad de identificar los conceptos y las relaciones entre conceptos que son clave en el vínculo problema-algoritmo en diversas situaciones.

A partir de lo observado en la citada investigación, se podría describir, *grosso modo,* la construcción de una representación de la siguiente manera: al comprender un problema, el alumno lo representa –lo cual implica aprovechar conocimientos ya existentes o construir otros nuevos–, en su representación están contenidos esquemas de entendimiento y de solución. El entendimiento puede resultar de la evocación y adaptación de un esquema conocido o del descubrimiento de uno nuevo. Con base en el entendimiento, se plantea una solución y se anticipa cierto resultado. Para solucionar el problema, el alumno decide cuál información es relevante y contingentemente decide cuáles serán las acciones apropiadas, ensaya uno o más esquemas de solución y acepta los que son congruentes con su entendimiento.

Dado el carácter flexible y adaptable del esquema, en el transcurso de la actividad el alumno puede rectificar, adecuar o modificar sus conocimientos, siempre buscando una congruencia entre su entendimiento y la solución del problema. Adopta nuevas representaciones que se vinculan con formas de representación que ya le son válidas. Estas relaciones entre representaciones son un indicador claro de la evolución del conocimiento.

En dicho estudio se identificaron diferentes categorías de la representación en las que se integran diversos esquemas de entendimiento y solución. A partir de éstas, se derivó un patrón en la evolución de la representación. A continuación, se presentan las categorías de representación encontradas.

Representación no canónica

En el esquema de entendimiento, el alumno aplica su conocimiento de una clase de problema que no corresponde al que se le plantea: es una interpretación equivocada del problema. Las reglas de acción, inferencias y propósitos para entender el problema corresponden a este significado *no canónico*. Los invariantes corresponden a los del significado no canónico atribuido al problema.

La solución generalmente se basa en un esquema algorítmico, pues el alumno posee el conocimiento para vincularlo con su interpretación (equivocada) del problema. Pero también puede ser no algorítmico cuando el alumno no conoce el vínculo entre un algoritmo y la clase de problema que consideró.

En general, la elección de un esquema erróneo es sistemática y corresponde a un problema perteneciente a la misma situación, pero más simple en términos del tipo de conceptos y relaciones entre conceptos que implica.

Representación canónica no algorítmica

Esta representación refleja un conocimiento rudimentario de las relaciones expresadas en el problema; en el esquema de entendimiento, las reglas de acción, inferencias y propósitos corresponden a un significado *canónico*. En el esquema de solución no se recurre a una operación aritmética, por lo que se considera *no algorítmico;* generalmente éste imita, mediante objetos o marcas gráficas, los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.

Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico

Esta representación constituye un puente el entendimiento de la relación algoritmo-problema. El esquema de entendimiento, las reglas de acción, inferencias y propósitos corresponden a un significado *canónico*. En la solución coexisten dos esquemas, uno no algorítmico, que es el que sustenta la solución, y uno algorítmico, que se acepta siempre que lleve a un resultado congruente con el obtenido mediante el esquema no algorítmico. A veces, el esquema no algorítmico precede al algorítmico y a veces se actúa al contrario.

Al principio, el algoritmo se acepta porque arroja el mismo resultado que el esquema no algorítmico, pero el alumno no se explica cómo es que son equivalentes entre sí. Para llegar a esta explicación, necesita construir nuevas relaciones entre los conceptos conocidos y descartar conceptos que son apropiados para un esquema no algorítmico pero no para uno algorítmico. La identificación del algoritmo se puede dificultar cuando el conocimiento del alumno acerca de éste contradice su entendimiento del problema (por ejemplo, si el problema habla de una transformación positiva, no se entiende la aplicación de la sustracción para calcularla).

Al principio, la relación entre ambos esquemas se basa en indicadores superficiales. Por ejemplo, los alumnos explican que contar con los dedos desde un número menor hasta uno mayor es lo mismo que restar del número mayor el menor, porque en ambos se obtiene el mismo resultado o porque en ambos esquemas se cuenta de manera similar (en ambos se dice *tantos para llegar a tantos*). Estas explicaciones serán sustituidas por otras basadas en el análisis de las relaciones entre invariantes operacionales.

Representación canónica algorítmica

En el esquema de entendimiento, se entienden las relaciones planteadas en el problema conforme a su significado canónico y, en el de solución, se comprende la relación con un algoritmo en particular. En este caso, se observa que el algoritmo funciona eficientemente como una herramienta de pensamiento pues: el alumno comprende las relaciones expresadas en él; es firme en la elección de un algoritmo determinado; y tiene argumentos para decidir por qué no es válido algún otro algoritmo.

Es necesario que el alumno construya nuevos conocimientos y descarte otros para presentar una *representación canónica algorítmica*. Así, se observó la existencia de conocimientos –conceptos en acto y teoremas en acto– que son clave en la evolución de la representación y que se vinculan con conocimientos y acciones fundamentales de la adición (combinar, juntar, aumentar) y la sustracción (decrementar).

Considerando el anterior patrón evolutivo de la representación, en el presente trabajo se pretende considerar los conceptos y relaciones entre conceptos para establecer un posible vínculo entre tres esquemas: el entendimiento del problema, la solución no algorítmica y la solución algorítmica. Se analiza el caso particular de las situaciones aditivas, cuya solución se relaciona con el empleo del algoritmo de la resta. La decisión de elegir la sustracción obedece a que resulta difícil para los alumnos reconocer su utilidad en la solución de problemas, pues suelen representarla como la operación contraria a la adición, cuando en realidad posee una significación propia (Vergnaud, 1997a). Esto se pondrá en evidencia en el análisis de los resultados del presente informe.

Participantes

Dos alumnas, Juana y Yola, tenían 10 años de edad y cursaban tercero de primaria. Ambas fueron consideradas por su maestra como alumnas regulares.

Procedimiento

Se empleó la metodología de entrevista clínica (Ginsburg, 1996). Al iniciar la entrevista se presentó a las niñas el problema por escrito para que lo leyeran. En caso de que tuviera alguna dificultad en la lectura, la entrevistadora les ofrecía leérselo. Las entrevistas se desarrollaron de manera individual.

Descripción de los problemas por resolver

Los problemas estudiados (véase el anexo) corresponden a situaciones de combinación, transformación, comparación y combinación de transformaciones (Vergnaud, 1998). Se seleccionaron problemas que se presumió podrían representar un reto para las alumnas y que, por tanto, darían oportunidad de explorar diferentes manifestaciones de su conocimiento.

Resultados

Juana

Es una niña que se muestra segura de sí misma. En todos los problemas con los que trabajó mostró un entendimiento canónico y preferentemente recurrió a un esquema algorítmico. Con frecuencia, emplea en sus argumentos términos matemáticos y muestra claridad en las relaciones asociadas a la sustracción. En algunas ocasiones no puede justificar el uso del algoritmo; sin embargo, se muestra firme en el significado de sus soluciones. En estos casos, ella señala "que no sabe por qué, pero así debe de ser". Juana considera que si ya se es grande no se debe contar con los dedos; además de que no es muy hábil para hacerlo, no puede coordinar el conteo de unidades y al mismo tiempo llevar la cuenta de las decenas que ha acumulado. Cuando difieren sus resultados entre ambos esquemas, ella privilegia el algoritmo.

Yola

Es una niña que enfrenta con muy buen humor las situaciones que no entiende, no se siente incómoda cuando hay algo que no sabe, simplemente se ríe. Cuando está segura de su solución, argumenta describiendo el proceso que siguió, pero no emplea argumentos en los que se hace alusión a los conceptos o a sus relaciones. Cuando la entrevistadora le presenta un argumento contrario a su punto de vista, parece aceptar lo que dice la entrevistadora, pero en su explicación retoma su propio punto de vista.

Yola conoce el algoritmo de la sustracción y la mayoría de las veces lo realiza sin errores. Sin embargo, recurre en varios de los problemas al esquema no algorítmico de agregar elementos de uno en uno desde el número menor hasta el mayor. Para realizarlo, escribe una marca por cada elemento que agrega y luego cuenta los elementos agregados. Este esquema frecuentemente es la base para seleccionar el algoritmo de la resta.

Solución a las situaciones de combinación

Para entender estos problemas se requiere establecer una relación entre las medidas de conjuntos elementales y uno compuesto. En el problema "Canicas" (Joaquín tiene 85 canicas, 37 son payasitos y las demás son munditos. ¿Cuántas canicas son munditos?), se pide identificar uno de los conjuntos elementales, conociendo el compuesto y el otro elemental. Para solucionar el problema empleando el algoritmo de la resta, un conocimiento clave es la relación inversa entre adición y sustracción. Ambas niñas muestran este conocimiento y presentan una representación canónica algorítmica y argumentan que no puede emplear-se la adición, pues el conjunto elemental no puede ser mayor que el conjunto compuesto.

Solución a las situaciones de transformación

Para entender estos problemas, es necesario relacionar en el tiempo, el estado inicial de un evento, una transformación y el estado final del evento. En ciertos problemas, la solución algorítmica requiere entender la inversión de la transformación y la relación inversa entre adición y sustracción.

En el problema "Volados" (Luis tenía 134 estampas, en el recreo jugó volados y ganó unas. Al terminar el recreo tenía 151 estampas. ¿Cuántas estampas ganó Luis en los volados?), Juana presenta una representación canónica algorítmica, entiende que la incógnita está en la transformación y, para su solución, establece una relación entre el estado final y el estado inicial. Inicia con un esquema no algorítmico, agregando elementos desde el estado inicial hasta el estado final, tiene un error que no identifica en el conteo al agregar elementos, luego emplea el algoritmo de la resta. Como los resultados difieren, acepta el obtenido mediante el algoritmo. En sus acciones, se identifica que conoce la relación inversa entre adición y sustracción, pues asocia agregar elementos del estado inicial al final con la sustracción del estado final menos el inicial, y considera la inversión de la transformación, pues indica que al inicio debía tener menos canicas que al final; al explicar su resta señala; "al iniciar tenía 134 y luego tuvo 151 y ganó 17".

En contraste, Yola presenta una *representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico*. Primero calcula la transformación, agregando de uno en uno elementos desde el estado inicial hasta el estado final. Cuando se le pide encontrar la transformación con una operación, ensaya sumar ($134 + 151 = 285$) y la descarta, pues el resultado es mayor que el valor del estado final, propone *hacerlo al revés*; entonces resta ($151 - 134 = 17$) y acepta el resultado porque es congruente con su esquema no algorítmico. Muestra un entendimiento incipiente de la aplicación de la relación inversa entre adición y sustracción, sustentada sólo en la similitud entre las cantidades. Esto se ilustra en su explicación de por qué agregar elementos de uno en uno del menor al mayor es lo mismo que restar.: "aquí [*se refiere a las marcas en el cuaderno*] el 17 son los que ganó Luis y acá [*se refiere al resultado de su resta*] también son los que ganó Luis, estos 151 son los que tenía al terminar el recreo y estos 134 son los que tenía Luis". Para emplear de manera directa el algoritmo de la resta, sin necesidad de apoyarse en su esquema no algorítmico, Yola necesita tener conocimientos acerca de la inversión de la transformación que le permitan inferir la relación entre un estado inicial y uno final en el que se desconoce la transformación. Asimismo, necesita descartar su entendimiento de que, si la situación habla de una transformación positiva, es necesario sumar.

En el problema "Apuesta" (Carlos tenía 145 carritos, en el recreo apostó unos. Al terminar el recreo tenía 79 carritos. ¿Qué pasó en la apuesta?), ambas niñas presentan una *representación canónica algorítmica,* identifican que la incógnita está en la transformación e infieren que, si ésta representó un decremento, lo apropiado es restar. Ellas conocen el significado de la resta como transformación negativa. Yola tiene un error en el procedimiento de reagrupamiento de las decenas, pues en lugar de disminuir una, la aumenta ($145 - 79 = 86$).

En el problema "Cumpleaños" (Antes de su cumpleaños Ana tenía algo de dinero en su alcancía. Después, su abuelita le regaló 88 pesos y así juntó 152 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana antes de su cumpleaños?), Juana recurre a una *representación canónica algorítmica.* Entiende que se pregunta el estado inicial, en su solución primero ensaya la suma y la descarta argumentando que la cantidad inicial no puede ser mayor que la final. Resta y obtiene un resultado congruente con su entendimiento. Aparentemente, al inicio Juana infiere que, si el problema habla de una transformación positiva, habría que sumar, pero espontáneamente descarta esta inferencia, presumiblemente, al analizar la relación entre la transformación y el estado final para calcular el estado inicial. Si bien es cierto que, en el primer ensayo, la solución es no canónica, ella replantea su solución para dar una solución canónica, esto es posible gracias a su conocimiento de la relación inversa entre adición y sustracción y a su conocimiento de la relación entre la resta y la inversión de la transformación. Conocimiento que se desprende de su explicación "es resta porque si a 152 le quitas 88 te da lo que tenía antes Ana".

En el esquema de entendimiento, Yola infiere que el estado inicial es menor que el estado final, pero no logra inferir el papel de la relación de la transformación con el estado final para emplear la resta. En el esquema de solución, primero ensaya sumar, posiblemente porque el problema habla de una transformación positiva (la cantidad que el personaje recibe de regalo), pero descarta el resultado de la suma y explica que el estado inicial debe ser menor que el estado final. Sin embargo, acepta como estado inicial el resultado de la suma que descartó ($88 + 152 = 240$) con lo que considera un dato que no aparece en el texto del problema. Ella indica que está confundida y vuelve a leer, prueba de nuevo sumar el estado final más la transformación y vuelve a descartar el resultado, dice que va a restar "al revés", y resta la transformación menos el estado final ($88 - 152 = 136$). Aunque escribe el número mayor en el minuendo, ella acepta su resultado, pues es congruente con su interpretación de que el estado inicial debe ser menor. La solución de Yola correspondería a un esquema de entendimiento canónico. Hay que resaltar que ella demuestra un entendimiento incipiente de la inversión de la transformación, infiere que debe haber una cantidad menor en el estado inicial. Sin embargo, en su esquema de solución, parecería que emplea el algoritmo de la resta, porque la suma no cubre su propósito. Cuando se le pregunta por qué restó, ella dice: "porque así me daba, creo que me daba menos". Yola decidió suspender en este punto su trabajo y no hubo oportunidad de observar si ella recurriría a un esquema no algorítmico que la llevaría a una representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico.

SOLUCIÓN A LAS SITUACIONES DE COMPARACIÓN

Para entender las situaciones de comparación, hay que establecer una relación entre la medida de un conjunto comparado y uno referente mediante la diferencia. Para ciertos problemas que se pueden resolver con la sustracción, se requiere conocer: que la diferencia es una medida que relaciona dos conjuntos pero que no pertenece a alguno de ellos, la relación de la diferencia con la sustracción y el recíproco de la relación de orden planteada entre los conjuntos referente y comparado.

En el problema "Pesos" (Luis tiene 124 pesos y Ana tiene 153 pesos. ¿Cuánto dinero más que Luis tiene Ana?), Juana presenta una *representación canónica algorítmica,* resta para calcular la diferencia. Considera la diferencia como una medida que relaciona a los conjuntos que se están comparando, pero que no pertenece a alguno de ellos. Ella explica que la diferencia es una cantidad "que no es de nadie".

En cambio, Yola soluciona el problema "Pesos" con una *representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico*. Primero transforma el conjunto menor agregando elementos de uno en uno hasta igualarlo con el mayor, así obtiene la diferencia, congruente con la acción de agregar, ensaya sumar y descarta, luego ensaya el algoritmo de la resta y lo acepta porque le da un resultado igual al de su esquema no algorítmico. En su justificación de la resta no es claro un vínculo con la diferencia, ella explica "porque si Ana tiene más, Luis tiene menos y por eso lo resté". Su conocimiento de la diferencia está sustentado en un esquema no algorítmico de transformación e igualación y no ha establecido que la diferencia es un término relacional que vincula dos conjuntos pero que no pertenece a ninguno de ellos, ella indica que el resultado de la resta "son los de Ana, por los que lleva Ana a Luis".

En el problema "Muñequitos" (Ana tiene 76 muñequitos y Luis tiene 37 muñequitos. ¿Cuántos muñequitos menos que Ana tiene Luis?), Juana presenta una *representación canónica algorítmica*. Resta y explica que su resta es correcta porque "a 37 sumarle 39 da 76", implícitamente emplea la diferencia para relacionar ambos conjuntos.

Yola en el problema "Muñequitos" presenta una *representación canónica no algorítmica*. Considera que la diferencia es parte de uno de los conjuntos y trata de obtener un número que sea semejante al de alguno de los conjuntos que se presentan en el problema. Primero trata de hacer una resta ($76 - 37 = 30$) que descarta pues "este 30 no sé de quién es, entonces no vale", luego suma ($37 + 76 = 113$) y descarta, pues "le dio más" (que las cantidades que se presentan en el problema), finalmente procede con un esquema de transformación e igualación como en el problema anterior. De su explicación se infiere que considera la diferencia como parte de uno de los conjuntos "Luis tiene 39 menos muñequitos que Ana" y hay una ambigüedad en su entendimiento del significado de la expresión *menos que* vinculada a la diferencia, pues también dice: "Luis le gana por 39 a Ana". Descarta la utilización de una operación, pues ninguna de las ensayadas da un resultado igual al de su esquema *no algorítmico*. Nuevamente, no establece un vínculo entre la diferencia y la sustracción.

En el problema "Ahorro" (Luis ahorró 173 pesos, él tiene 45 pesos más que Ana. ¿Cuánto dinero ahorró Ana?), Juana entiende que hay que calcular el conjunto referente; para solucionar, analiza la relación entre ambos conjuntos y establece el recíproco de su relación. Infiere que, si el conjunto comparado tiene más, el conjunto referente debe tener menos e interpreta la expresión *más que*, relacionada con la diferencia, como una medida que relaciona dos conjuntos. Resta y comete un error de cómputo ($173 - 45 = 168$) del que no se percata, pues el resultado es congruente con su idea de que el conjunto referente tiene menos elementos, lo corrige cuando el entrevistador le pide que explique cómo hizo su algoritmo.

En el problema "Ahorro", Yola presenta una *representación canónica no algorítmica*. Agrega elementos desde la diferencia hasta el conjunto comparado para calcular el referente, comete un error, pues al contar no considera las centenas, luego ensaya el algoritmo y resta correctamente (173 – 45 = 128), pero lo descarta, pues el resultado no coincide con su esquema no algorítmico. En este problema, Yola sigue considerando la diferencia como parte de uno de los conjuntos y, pese a que ensaya la resta, no comprende su relación con el recíproco de la relación planteada entre los conjuntos.

En el problema "Corcholatas" (Luis juntó 96 corcholatas y Ana juntó 52 corcholatas menos que Luis. ¿Cuántas corcholatas juntó Ana?), Juana establece una *representación canónica algorítmica*. Identifica que se pregunta el valor del conjunto comparado e infiere que debe restar, pues éste tiene menos elementos. Ella, al igual que en el problema anterior, demuestra su entendimiento de que la diferencia es una medida que relaciona los conjuntos referente y comparado, y soluciona relacionando el recíproco de la relación planteada entre los conjuntos con la sustracción.

Yola presenta una *representación canónica algorítmica basada en un esquema no algorítmico*. Primero, para calcular el valor del conjunto comparado, agrega elementos desde el cardinal de la diferencia hasta el del conjunto referente y cuenta los elementos que agregó. Luego, infiere que debe restar, pues el resultado es menor que el valor del conjunto referente y dice que no se puede sumar "porque nada más son para que llegue a 96". Sustenta su solución en la igualación de los conjuntos y en la relación de orden indicada en el problema.

Solución a las situaciones de combinación de transformaciones

En estas situaciones, transformaciones elementales se relacionan temporalmente para dar lugar a una transformación compuesta. La dificultad varía dependiendo: del lugar que ocupe la incógnita, de si las transformaciones son de un solo tipo o combinadas y del número de transformaciones combinadas.

En el problema "Juego 1" (En un juego tenía 46 puntos y gané otros 65 y luego perdí 53 puntos. ¿Cuántos puntos tuve al final?), Juana establece una *representación canónica algorítmica* y no tiene dificultad para coordinar el empleo de los algoritmos de la suma y resta, y explicar el cálculo relacional implícito. Tiene un error de cálculo que corrige cuando rectifica su operación.

Yola también establece una *representación canónica algorítmica*. Pero, no obstante que identifica que debe combinar los algoritmos de suma y resta, tiene dificultades con el procedimiento de reagrupamiento de las centenas en la resta (111 – 53 = 158) y no obtiene el resultado esperado. Considera que el error se debe a la manera como sumó, por lo que vuelve a sumar invirtiendo los sumandos, con este resultado vuelve a restar, de nuevo comete el mismo error de reagrupamiento y obtiene el mismo resultado, finalmente señala que el resultado debe ser menor que el resultado de combinar las transformaciones positivas, pero que no sabe cómo hacer la resta. La entrevistadora la ayuda a llegar al resultado correcto. Yola no ha entendido totalmente la relación entre el procedimiento de reagrupamiento y las propiedades del sistema decimal.

En el problema "Juego 2" (En un juego gané 174 puntos y luego perdí 248 puntos. ¿Cómo quedé al final?), Juana presenta una *representación canónica no algorítmica*. Indica desde el principio que "quedó debiendo puntos" y, para calcular la deuda, escribe el algoritmo de la resta, pero pone el número menor en el minuendo. Intenta resolver la resta, pero la interrumpe, pues no puede realizar el procedimiento de reagrupamiento en las centenas ($174 - 248 = 26$) e indica que "ya no se puede pedir prestado". Luego ensaya una suma ($174 + 248 = 422$) y descarta el resultado, pues obtiene un número mayor que el esperado, lo que no corresponde a su entendimiento. Vuelve a la resta e indica que el resultado correcto puede ser ése, pero cuando la revisa dice que "no se puede, poner esto ($174 - 248 = 26$), porque si no quedaría en deuda este resultado y estos números" e indica "que aunque había ganado perdió después y quedó debiendo puntos". Es importante señalar que en ningún otro problema Juana escribió inadecuadamente la resta y que, cuando se le sugería rectificar, ella identificaba sus errores al aplicar las reglas del algoritmo; enfrenta un conflicto, pues sabe que, en una transformación negativa, al estado inicial se le resta el final, pero en este problema el primero es menor que el segundo, por lo que, a su entender, la resta no puede realizarse.

Yola, por su parte, presenta una *representación no canónica*. Considera que la situación es imposible porque "dice que ganó 174 y que perdió 248 y dice que como quedó al final y entonces perdió todo". Cuando se le sugiere la posibilidad de quedar a deber, primero inventa una cifra, pero luego se retracta y sostiene que no se puede quedar a deber ni tampoco hacer una operación. Para Yola entender este problema es complicado, pues contradice su conocimiento acerca de una transformación negativa. Ella sabe que un decremento ocurre sólo cuando a una cantidad de elementos mayor se le quita una menor. De acuerdo con su argumento, al exceder la segunda cantidad a la primera, ya no se pueden quitar elementos y, por tanto, el resultado es cero. Quizá para Yola los números están ligados a objetos existentes y, por ello, la posibilidad de una deuda es inadmisible (si ya no hay elementos que quitar, ya no se puede quitar y el resultado es cero), por la misma razón no tiene sentido hacer una resta.

CONCLUSIÓN

Actualmente, en el ámbito de la enseñanza de solución de problemas, se destaca la necesidad de presentar al alumno *experiencias de aprendizaje significativas*. En el caso de los algoritmos, cabe preguntar: ¿qué los hace significativos? La cuestión no sólo se refiere a que se enseñen en el contexto de problemas referidos a situaciones de la "vida real", también hay que considerar que lo que vuelve significativo a un algoritmo es la posibilidad de que el alumno pueda atribuirle un significado; entonces es cuando el algoritmo efectivamente funciona como una herramienta para llegar a una solución que, desde el punto de vista del entendimiento del alumno, es verdadera. De acuerdo con Harel y Lesh (2003), los alumnos consideran válidos aquellos resultados que brindan evidencia de su congruencia con su entendimiento de un problema.

En el caso particular del algoritmo de la resta en el presente trabajo, se muestra, mediante un análisis de los procesos cognoscitivos del niño, por qué conocer el algoritmo no es suficiente para entender en qué situaciones emplearlo, aun cuando el problema se haya entendido de acuerdo con su significado canónico. Esto puede manifestarse de diversa maneras:

1. Hay un esquema de entendimiento canónico; sin embargo, en el esquema de solución no se emplea el algoritmo, pues no se reconoce su utilidad para encontrar la solución. Por ejemplo, Juana, quien, a pesar de conocer y aplicar adecuadamente el algoritmo de la resta en otros problemas, al enfrentar el problema "Juego 2" que tiene cantidades con valores negativos, termina por no hacer una resta, pues considera que ésta no es posible.
2. Hay un esquema de entendimiento canónico, pero la principal vía de solución es un esquema no algorítmico. Por ejemplo, en varios de los problemas, Yola privilegia un esquema no algorítmico que consiste en agregar elementos de uno en uno y luego contar los elementos agregados. Luego selecciona la resta, pues ésta coincide con el resultado que ya obtuvo mediante su esquema no algorítmico. Pero en varios problemas, primero suma y descarta este resultado por la falta de coincidencia y sólo entonces ensaya la resta.

Si reconocemos la realidad de los dos casos anteriores, la siguiente cuestión sería dilucidar qué es lo que los determina. Para empezar, habría que considerar que los problemas difieren en términos de su complejidad conceptual. Por ejemplo, en una situación de comparación, es más sencillo calcular la diferencia que calcular el valor del conjunto referente, cuando éste es menor que el comparado; igualmente, en una situación de transformación, es más sencillo calcular el estado final que una transformación positiva. Por consiguiente, al considerar las diferencias en la complejidad conceptual de los problemas, podríamos hablar de dos situaciones: cuando no se poseen conocimientos conceptuales para vincular el algoritmo con el entendimiento del problema, y cuando se poseen conocimientos que dificultan el vínculo entre entendimiento y la solución algorítmica.

En el primer caso, se encuentra que, para cada uno de los problemas planteados en las diversas situaciones, existen conocimientos que son clave, aunque éstos, si bien no son conceptos matemáticos en un sentido estricto, son igualmente importantes. Por ejemplo, se observa que Yola, pese a que posee un entendimiento adecuado del esquema de sustracción, sólo lo aplica como primera opción de solución cuando, a su entender, las situaciones hacen referencia a un decremento o a una relación de orden de un número mayor a uno menor; en los demás problemas se identifica que hay conceptos y relaciones que no ha entendido. En cambio, Juana emplea y justifica eficazmente el algoritmo.

En el perfeccionamiento de la solución de los problemas, el significado del algoritmo de la sustracción, como una relación de decremento entre cantidades, se vincula con otros significados como el de transformación negativa, diferencia como medida de relación entre conjuntos o la transformación de cantidades con valores negativos. Igualmente, como ya se señaló en el análisis de resultados, dependiendo de la situación, el algoritmo de la sustracción se vincula con otros conceptos que son clave para establecer su relación con la solución del problema (inversión de la transformación, recíproco de la relación planteada, diferencia como medida de relación, etc.). Los alumnos pueden comprender dichos conceptos y sus relaciones si se les da la oportunidad de construir un vínculo con su esquema no algorítmico (por ejemplo, agregar elementos de uno en uno).

¿Por qué ocurre lo anterior? Una explicación plausible es que los esquemas no algorítmicos imitan directamente las relaciones que el alumno ha identificado en el problema, lo que facilita que actúe a partir de ellas; por ejemplo, en un problema de comparación, representa a los dos conjuntos y luego agrega elementos al conjunto menor hasta igualarlo con el mayor y entonces establece una diferencia. Al principio, los alumnos encuentran un vínculo fijándose sólo en la forma (*v.g.* en el esquema algorítmico y en el no algorítmico se presentan los mismos números); gradualmente los alumnos encontrarán las relaciones a partir del entendimiento del significado de los números y de las relaciones entre estos significados. Tanto la posibilidad de reflexionar sobre la similitud de las soluciones algorítmicas y no algorítmicas como la posibilidad de discutirla con otros facilitan al niño entender esta relación y, a la larga, transitar a un esquema algorítmico. El proceso de tránsito constituye, sin duda, un objeto de investigación relevante para la enseñanza de las matemáticas.

En el segundo caso, cuando se poseen conocimientos que dificultan el vínculo entre entendimiento y solución, se encuentra que hay ciertas situaciones que se pueden solucionar con el algoritmo de la sustracción sólo si se dejan de lado ciertos entendimientos. Por ejemplo, se observa que Juana tiene un conocimiento amplio de la sustracción; sin embargo, cuando en el problema "Juego 2" se le presentan relaciones que implican cantidades negativas, no concibe la aplicación de la sustracción, pues a su entender las transformaciones sólo son factibles en la relación entre un estado inicial mayor y un estado final menor, tendrá que hacer a un lado este entendimiento para poder vincular la sustracción con el cálculo de valores negativos. Igualmente, en el caso de Yola, considerar que la resta se refiere a una transformación negativa dificulta entender su relación con el cálculo de la diferencia en las situaciones de comparación. Otro ejemplo es la dificultad de asociar un esquema de agregar elementos con la sustracción, pues en principio esto se asocia a la suma.

El trabajo de Brousseau (1997) sobre los obstáculos epistemológicos puede ser una explicación plausible de por qué ciertos entendimientos dificultan una solución. Brosseau señala que son limitaciones que impone el mismo desarrollo del conocimiento y que resultan de la aplicación de un conocimiento que con anterioridad y en otras situaciones ha sido exitoso.

Brousseau (*op. cit.*), retomando el trabajo de Duroux, señala que, para considerar un conocimiento como un obstáculo epistemológico, debe reunir cinco condiciones: *1)* Se refiere a un conocimiento específico. *2)* Este conocimiento es válido y efectivo en situaciones particulares. *3)* Fuera de estas situaciones, es falso, irrelevante o lleva a errores. *4)* Este conocimiento es *resistente* a contradicciones ocasionales y al establecimiento de un conocimiento más adecuado, es necesario también explicar por qué el anterior no es adecuado. *5)* Aun después de que se ha demostrado que es inadecuado, persiste. Para ejemplificar lo anterior, Brosseau menciona el caso de la relación entre el entendimiento de los números negativos y la idea de que los números deben ser la medida de algo, conocimiento que es válido para muchas situaciones, pero una limitante para comprender los números negativos.

Considerando las respuestas de las niñas ante algunos problemas, es factible pensar que algunas de las respuestas de Juana y Yola pueden entenderse como obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, en el problema "Juego 2", se observa que Yola considera sólo factible un resultado de cero, puesto que para ella, *ya no queda nada que contar*. Igualmente, la idea de sustracción como transformación negativa le dificulta el entendimiento de la relación de la sustracción con la diferencia. En Juana se observa también un obstáculo cuando intenta calcular la deuda partiendo de su conocimiento de la relación entre la sustracción y las relaciones entre un estado inicial, una transformación negativa y un estado final. Desde luego, según Brousseau (*op. cit.*), para demostrar que los ejemplos anteriores son obstáculos, habrá que tener pruebas de los cinco criterios marcados y de la regularidad de su aparición entre los alumnos.

Brousseau indica que, para superar el obstáculo, es necesario permitir que el alumno enfrente situaciones en las que la aplicación de un conocimiento que ya posee y es falso o inapropiado para la situación lo lleve a un conflicto que dé lugar a la construcción de un nuevo conocimiento. De acuerdo con el presente informe, también ayudaría promover que el alumno descifre y explicite las relaciones entre su esquema no algorítmico y el algorítmico.

Retomando la idea de crear situaciones de aprendizaje significativo de un algoritmo, un punto de partida es entender cómo está entendiendo un alumno un problema en el momento de realizarlo. *Entender cómo están entendiendo los alumnos* se facilita si el docente tiene un referente claro de cómo evoluciona la comprensión del vínculo algoritmo-problema, así como la influencia de los aspectos conceptuales que dan lugar a que los problemas tengan un diferente nivel de complejidad. En este trabajo se ha tratado de mostrar que las diferencias de entendimiento entre los alumnos se pueden analizar: *1)* considerando la complejidad conceptual de los problemas; *2)* considerando que la representación del problema está constituida por un esquema de entendimiento y uno de solución, y que la comprensión de los conceptos es medular para vincular ambos esquemas; *3)* considerando la importancia de los esquemas no algorítmicos, pues funcionan como puentes para la comprensión del empleo del algoritmo.

Peltier (2003) señala que existe una fuerte imbricación entre el significado que se atribuye a un problema y los procedimientos de resolución que los alumnos ponen en funcionamiento al solucionarlo. Coincidente con este planteamiento, en el presente trabajo se ha descrito cómo, al solucionar un problema, un esquema de entendimiento lleva a esquemas particulares de solución, pero también se ha mostrado que los esquemas de solución están supeditados al conocimiento de conceptos específicos, de tal suerte que no basta conocer un algoritmo para entender su significado en un problema. En un trabajo anterior

(Flores, Farfán y Ramírez, 2004), se mostró que se facilita el vínculo entre el entendimiento canónico y la solución algorítmica, si el alumno procede de acuerdo con una estrategia que promueve un puente entre una solución no algorítmica y una algorítmica, y si se cuenta con la ayuda de un mediador (el profesor o un compañero) que favorece el análisis de este vínculo.

Aún no conocemos cabalmente cuáles aspectos de la historia de cada alumno determinan las diferencias interindividuales en el entendimiento del vínculo algoritmo-problema. En este trabajo se ha tratado de mostrar que estas diferencias se relacionan con el funcionamiento cognoscitivo, específicamente con el entendimiento de conceptos y relaciones entre conceptos que se establecen en las diferentes representaciones y se ha tratado de argumentar a favor de la consideración de estas diferencias en la adaptación de la enseñanza. Desde luego, esto constituye un reto para la educación, pues si bien se busca el beneficio de individuos, la enseñanza en las aulas se dirige a grupos. Considerando lo anterior, trabajos como el presente pueden ser de utilidad para modificar las concepciones de los docentes y para diseñar actividades de enseñanza.

El algoritmo es una herramienta que la humanidad desarrolló para facilitar el cálculo numérico en problemas matemáticos que se presentan en situaciones cotidianas. La historia de las matemáticas demuestra que, para su invención, hubo que entender conceptos y principios acerca de los números, sus relaciones y sus operaciones y vincular este conocimiento con otros conocimientos que no son matemáticos y están expresados en un lenguaje natural, pero que son igualmente importantes. Si reconocemos que este proceso es similar al que siguen los alumnos al comprender los procedimientos de los algoritmos y su empleo, estaremos en posibilidad de entender por qué no es razonable querer enseñar a restar, multiplicar o dividir, tratando esto como si fuera un conocimiento que contiene en sí mismo la explicación de su utilidad.

ANEXO. DESCRIPCIÓN DE LO PROBLEMAS PLANTEADOS

Situación	Problema
Parte–parte–todo Incógnita en la medida de uno de los conjuntos elementales	"Canicas": Joaquín tiene 85 canicas, 37 son payasitos y las demás son munditos. ¿Cuántas canicas son munditos?
Estado–transformación–estado Incógnita en la transformación Transformación positiva	"Volados": Luis tenía 134 estampas, en el recreo jugó volados y ganó unas. Al terminar el recreo tenía 151 estampas. ¿Cuántas estampas ganó Luis en los volados?
Estado–transformación–estado Incógnita en la transformación Transformación negativa	"Apuesta": Carlos tenía 145 carritos, en el recreo apostó unos. Al terminar el recreo tenía 79 carritos. ¿Qué pasó en la apuesta?
Estado–transformación–estado Incógnita en el estado inicial Transformación positiva	"Cumpleaños": Antes de su cumpleaños Ana tenía algo de dinero en su alcancía. Después, su abuelita le regaló 88 pesos y así juntó 152 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana antes de su cumpleaños?
Comparación entre dos conjuntos Incógnita en la diferencia Conjunto referente menor que el comparado	"Pesos": Luis tiene 124 pesos y Ana tiene 153 pesos. ¿Cuánto dinero más que Luis tiene Ana?
Comparación Incógnita en la diferencia Conjunto referente mayor que el comparado	"Muñequitos": Ana tiene 76 muñequitos y Luis tiene 37 muñequitos. ¿Cuántos muñequitos menos que Ana tiene Luis?
Comparación Incógnita en el conjunto referente Conjunto referente menor que el comparado	"Ahorro": Luis ahorró 173 pesos, él tiene 45 pesos más que Ana. ¿Cuánto dinero ahorró Ana?
Comparación Incógnita en el conjunto comparado Conjunto referente mayor que el comparado	"Corcholatas": Luis juntó 96 corcholatas y Ana juntó 52 corcholatas menos que Luis. ¿Cuántas corcholatas juntó Ana?
Combinación de transformaciones Primera y segunda mayor que la tercera	"Juego 1": En un juego tenía 46 puntos y gané otros 65 y luego perdí 53 puntos. ¿Cuántos puntos tuve al final?
Combinación de transformaciones Primera menor que la segunda	"Juego 2": En un juego gané 174 puntos y luego perdí 248 puntos. ¿Cómo quedé al final?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A., D. Block y A. Carvajal (2003), "Investigaciones sobre educación preescolar y primaria", en A. D. López y Mota (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo I,* México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa, pp. 49-170.

Brun, J. (1996), "The Theory of Conceptual Fields and its Applications to the Study of Systematic Errors in Written Calculations", en H. Mansfield, N. A. Pateman y N. Bednarz (eds.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children: International Perspectives on Curriculum,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 120-134.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990,* editado y traducido por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1991), *En la vida diez, en la escuela cero,* México, Siglo XXI Editores.

Dantzing, T. (1971), *El número: Lenguaje de la ciencia,* Buenos Aires, Hobbs (traducido del inglés, 1954).

Flores, Macías, R.C. (2003), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación,* Aguascalientes, México, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, R. C., A. Farfán y C. Ramírez (2004), "Enseñanza de una estrategia para la solución de problemas de adición y sustracción en alumnos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas", *Revista Mexicana de Psicología,* vol. 21, núm. 2, pp. 179-189.

Ginsburg, H.P. (1996), *Entering the Child's Mind: The Cognitive Clinical Interview in Psychological Research and Practice,* Cambridge, MA, Cambridge University Press.

Harel, G. y R. Lesh (2003), "Local Conceptual Development of Proof Schemes in a Cooperative Learning Setting", en R. Lesh y H.M. Doerr (ed.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 359-382.

Nunes, T. y P. Bryant (1998), *Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño,* México, Siglo XXI Editores (traducido del inglés, 1996).

Peltier, M. (2003), "Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 3, pp. 29-55.
Secretaría de Educación Pública (2002), *Diagnóstico y competencias, tercer año,* México, SEP.
Vergnaud, G. (1987), *Conclusion Chapter,* en C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 227-232.
—— (1990), "Epistemology and Psychology of Mathematics Education", en P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Cambridge, Gran Bretaña, Cambridge University Press, pp. 14-30.
—— (1996), "The Theory of Conceptual Fields", en L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 219-240.
—— (1997a), *El niño, las matemáticas y la realidad,* México, Trillas (traducido del francés, 1985).
—— (1997b), "The Nature of Mathematical Concepts", en T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective,* Hove, Reino Unido, Psychology Press, pp. 5-28.
—— (2000), "Constructivism et apprentissage des mathematiques", Trabajo presentado en la Conferencia sobre Constructivismo en Ginebra, Suiza.
Vergnaud, G. y M. Récopé (2000), "De Revault d'allonnes à une théorie du schème aujourd'hui", *Psychologie Française,* vol. 45, núm. 1.

DATOS DE LA AUTORA

Rosa del Carmen Flores Macías
Universidad Nacional Autónoma de México, México
rcfm@servidor.unam.mx

Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media: ¿por qué y cómo?*

Aline Robert y Nicolas Pouyanne

Resumen: En la primera parte del artículo precisamos algunas dificultades generales que encuentran los profesores de matemáticas de educación media en relación con los aprendizajes de los alumnos. Introducimos la idea de que la formación, para contribuir a rebasar estas dificultades y modificar ciertas prácticas, debe pensarse intercalando momentos de práctica y momentos de trabajo con un formador. Esos formadores también deben ser formados, pues su experiencia “en bruto” no nos parece suficiente; el resto del artículo se consagra a ese tipo de formación. Exponemos las ideas generales que nos permitieron concebir tal formación y precisamos las modalidades que conservamos. Intentamos formar principalmente en análisis de sesiones de clase centrados en las actividades matemáticas de los alumnos, así como en las restricciones y los márgenes de maniobra de los profesores. En particular, explicamos cómo algunas de nuestras investigaciones sobre las prácticas de enseñanza nos han conducido a seleccionar actividades de formación como el análisis de videos, y a la concepción de “escenarios de formación”. Concluimos con algunas preguntas abiertas.

Palabras clave: formación de formadores, prácticas de enseñanza de las matemáticas, actividades de formación, análisis de video de sesiones de clase.

Résumé: Dans cet article nous précisons d’abord quelques difficultés assez générales que rencontrent les enseignants de mathématiques du second degré en relation avec les apprentissages des élèves. Nous introduisons alors l’idée qu’une formation, pour contribuer à surmonter ces difficultés et à modifier certaines pratiques, doit être pensée en imbriquant des moments sur le terrain et des moments de travail regroupé avec un formateur. Ces formateurs doivent eux-mêmes être formés, leur expérience “brute” ne nous semble pas suffisante, et c’est à ce type de

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2004.

* En el original en francés: “second degré” (educación media) se refiere al nivel escolar que atiende alumnos de 11 a 18 años. Traducción del francés de David Block y Alicia Ávila.

formation que nous consacrons le reste de l'article. Nous exposons les idées générales que nous avons suivies pour concevoir une telle formation en précisant les modalités retenues. Nous essayons de former notamment aux analyses de séances de classe, centrées sur les activités mathématiques des eleves ainsi que sur les contraintes et les marges de manoeuvre des enseignants. En particulier nous expliquons comment certaines de nos recherches sur les pratiques des enseignants nous ont amenés à des choix d'activités de formation comme les analyses de vidéo ainsi qu'à la conception de "scénarios de formation". Nous concluons par un certain nombre de questions ouvertes.

Mots clefs: formation de formateurs, pratiques d'enseignants de mathématiques, activités de formation, analyses de vidéo de séances de classe.

INTRODUCCIÓN

Hoy día, en Francia, la formación profesional inicial de los maestros de nivel medio se lleva a cabo, esencialmente,[1] después de un prerreclutamiento a partir de un concurso en el que se evalúan conocimientos estrictamente matemáticos.[2] Esta formación se lleva a cabo en establecimientos universitarios llamados Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM). Durante un año –el segundo de IUFM– estos futuros maestros tienen la responsabilidad de impartir todas las clases de matemáticas (seis horas máximo) de un grupo; para ello reciben la ayuda de un maestro de matemáticas con plaza:[3] el "consejero pedagógico"; además, reciben una formación obligatoria, general y matemática a la vez, dos días por semana. También deben redactar un trabajo final (la "memoria profesional") a partir de la experiencia en clase. De esta manera, a lo largo de su formación los futuros maestros son acompañados por diversos formadores que los hacen trabajar, ya sea en las clases, ya sea reunidos en los centros de formación. La mayor parte de estos futuros maestros reciben una certificación al final de ese año.

En cambio, la formación continua[4] en general no es obligatoria. Esta formación se organiza con frecuencia en forma de estancias cortas que los maestros

[1] Hay algunos módulos de profesionalización previa en la universidad, pero éste no es el caso general.

[2] El primero, llamado CAPES, para la mayoría de los futuros maestros de secundaria; el segundo, más difícil, llamado agregación.

[3] Si es posible del mismo establecimiento, aunque no siempre sucede así.

[4] No nos referimos aquí a la formación para los concursos internos, la cual no pertenece al campo estrictamente profesional.

realizan sin descarga horaria ni suplemento económico. La lista de estas estancias debe recibir la aprobación de una comisión relacionada con los organismos que pagan a los formadores.

¿Quiénes son todos estos formadores? Reina una gran diversidad: ciertas estancias son conducidas por maestros voluntarios que han llegado a los Institutos de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas (IREM) creados en las universidades; otros formadores son maestros que han sido identificados y juzgados como excelentes por la inspección pedagógica regional y a quienes se les ha propuesto convertirse en formadores. La mayor parte de las veces, esos formadores siguen siendo maestros, pero reciben una descarga parcial de horas clase.

De esta manera, actualmente, el reclutamiento de formadores no pone en juego con los alumnos conocimientos "reconocidos" oficialmente, sino más bien criterios relativos a la experiencia y al éxito profesional. Su formación como formadores se hace esencialmente en la práctica, a partir de su experiencia (con frecuencia amplia) y de los intercambios que pudieron haber tenido entre ellos.

El proceso que expondremos en este texto es distinto, puesto que se trata de proponer una formación organizada *ex profeso* para estos formadores. Hay, de hecho, un principio de reconocimiento institucional de este proceso: en 2004-2005 en la universidad de París 7 se abrió un diploma universitario llamado maestría profesional –reconocida a nivel nacional– para "formar formadores de maestros de nivel medio en matemáticas". Por ahora, el diploma otorgado no compromete a nada de manera automática: ni a convertirse en formador, ni a ser reclutado como formador. Pero debido a que es muy probable que de aquí en adelante haya cada vez más procedimientos de reclutamiento específicos de formadores, este diploma puede funcionar favorablemente.

En este artículo vamos a presentar primero una justificación del procedimiento de formación de formadores que proponemos. Después, señalaremos nuestros objetivos precisos en este tipo de formación y describiremos las modalidades de formación que suponemos adecuadas. Las experiencias que ya hemos realizado nos hacen pensar que así es. Concluiremos con algunas preguntas.

¿POR QUÉ FORMAR FORMADORES?

Exponemos a continuación la razón de ser de esta formación. En una palabra: las expectativas que se tienen sobre la enseñanza de las matemáticas del nivel medio en las condiciones actuales, así como nuestras hipótesis sobre los aprendizajes de los alumnos, sobre las prácticas de los maestros y sobre su formación, son las que nos llevan a proponer formadores "formados" de una manera específica.

Varios trabajos realizados sobre la enseñanza primaria han puesto de manifiesto desajustes importantes entre los objetivos de los formadores y las prácticas ulteriores de los formados (Masselot, 2000; Vergnes, 2001). Entre los numerosos factores que pueden originar estos desajustes, se ha mencionado la insuficiencia de la formación en lo que respecta a las relaciones entre el mensaje teórico y las prácticas cotidianas. Desde nuestro punto de vista, ésta es precisamente una de las problemáticas principales en el nivel medio. Se trata pues de formar formadores que estén preparados explícitamente para su misión. Deben ser *algo más* que "super maestros", cuyo capital esencial es la experiencia personal enriquecida *a posteriori*: los formadores "con los que soñamos" deben lograr elaborar escenarios de formación adaptados para instalar, enriquecer y ver cambiar las prácticas de los maestros de matemáticas en relación con los aprendizajes de los alumnos.

Expectativas y dificultades generales en la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio

Sin entrar en el detalle de las expectativas sobre la enseñanza de las matemáticas, puede decirse, sin demasiado riesgo de error, que actualmente existe cierto malestar en relación con la calidad de los aprendizajes de los alumnos del nivel medio (11 a 18 años, primero colegio, después liceo). Esto tiene consecuencias incluso en la enseñanza superior: muchos colegas esperan encontrar en sus estudiantes conocimientos que en efecto no fueron adquiridos como ellos hubieran pensado.

Tres disfuncionamientos de la enseñanza de las matemáticas sobre los que hablaremos un poco más adelante eran ya importantes cuando, al llegar la democratización y masificación[5] de la enseñanza en el nivel medio, se volvieron extremadamente perjudiciales para los aprendizajes. Todas las dificultades se agravaron, en efecto, debido a la heterogeneidad creciente de los grupos, de las instituciones; debido a las reducciones de horas de clase de matemáticas y a fenómenos sociales que van mas allá de la escuela y que, sin embargo, influyen en las condiciones de trabajo de los alumnos.

[5] Véase Bautier, Rochex (1998): se trata de la ampliación del acceso al colegio y al liceo a categorías de niños que antes no podían ingresar.

En primer lugar, pensamos que la ilusión de transparencia para los alumnos de la "buena" exposición, clara, bien dominada por el maestro, está todavía muy extendida. Tales exposiciones no son accesibles para todos los alumnos; además, las dificultades de apropiación de lo que el profesor dice en clase pueden incluso acarrear dificultades en el trabajo que se hace en casa:[6] hay aquí una posible causa de una espiral descendente bien conocida. Nuevas formas, principalmente simulaciones de diálogo en lugar de un curso magistral o actividades triviales de introducción, pudieron hacer creer que ocurría un cambio profundo. Nosotros pensamos que esto fue insuficiente, que incluso ha representado un engaño, un señuelo y que, para demasiados alumnos, hacer matemáticas sigue siendo, como antes, realizar una serie de pequeñas tareas aisladas unas de otras, en las que hay que aplicar correctamente la propiedad o la regla que indica el maestro. El menor cambio en el enunciado, la menor iniciativa que deba tomarse, se convierten en retos insuperables para los alumnos. Si bien relacionamos, con respecto a este fenómeno, la naturaleza de los aprendizajes con las condiciones que organizan los maestros, no por ello dejamos de considerar que existen causas profundas, legítimas, que originan las elecciones de los maestros. No es nada sencillo modificar esas elecciones aun cuando se está convencido del interés de hacerlo.

El segundo lugar, hemos observado la importancia creciente de los malentendidos,[7] es decir, desajustes esenciales entre la actividad que el maestro cree que el alumno ha desarrollado para resolver una tarea y su actividad real; esta última se manifiesta, en el caso de muchos alumnos, mucho más restringida, y superficial de lo previsto, especialmente en las zonas de educación prioritarias (ZEP).[8] Para tomar un pequeño ejemplo, en tercer grado un maestro desarrolla un razonamiento sobre un triángulo rectángulo genérico, llamado ABC, mientras que algunos alumnos trabajan en el caso particular que aparece dibujado en su cuaderno y no se dan cuenta de que el teorema que fue demostrado (digamos el teorema de Pitágoras) es válido para todos los triángulos análogos. De la misma manera, algunos alumnos no llegan a explicarse el teorema si el triángulo se llama MNP, o bien, si se lo dibuja "con la cabeza para abajo".

Este problema adquirió cierta importancia hasta que ingresaron al nivel medio nuevas capas de alumnos. Combatirlo constituye otra razón de ser de la formación de maestros. No se trata de abatir las exigencias, por ejemplo, llamando

[6] Véase Felix (2004).

[7] *Ibidem*. Véase también Butlen, Peltier, Pezard (2002) para la primaria.

[8] Son establecimientos frecuentados mayoritariamente por alumnos de un medio social desfavorecido, donde abundan las dificultades, inclusive la violencia.

a todos los triángulos ABC, sino de tener a disposición recursos para propiciar que este tipo de alumnos construyan sus conocimientos de matemáticas.

Por último, la integración de nuevas tecnologías (TIC) no se improvisa. Los maestros enfrentan con frecuencia dificultades para utilizarlas, pese a que éstas podrían constituir una alternativa para enfrentar el tan señalado aburrimiento y desinterés con respecto a las ciencias. Considerar que se trata sólo de aprender la manipulación matemática de los programas oculta un aspecto fundamental de dicha utilización, a saber, que la gestión de los alumnos debe ser modificada y debe volverse más exigente en términos de exposición de conocimientos y de tránsito a lo escrito. Efectivamente, se ha mostrado que aun cuando los alumnos pueden comprometerse bien en la actividad con la computadora, tienen dificultad para salir de dicha actividad y alcanzar la conceptualización que sigue, a pesar de que ésta es el objetivo final. Por otra parte, ciertas concepciones matemáticas deben cambiar a raíz de la utilización de estos instrumentos, por ejemplo, la noción de economía debe ser revisada profundamente y, sin duda, sustituida por la idea de control: en ciertos casos ya no se trata de encontrar la manera más económica de hacer un cálculo, sino de verificar que el cálculo delegado a la computadora es el correcto. Están también las cuestiones que tienen que ver con la evaluación y que afectan el trabajo con la computadora en la medida en que, por lo menos hasta ahora, por lo general en los momentos de examen no se cuenta con una computadora. Por tanto, es necesario tener conocimientos específicos para poner en juego, lo más rápidamente posible y sin desilusión para los maestros, una enseñanza que integre las TIC.

DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS APRENDIZAJES DE LOS ALUMNOS: ACTIVIDADES FRECUENTEMENTE REDUCIDAS

En nuestra perspectiva didáctica, el aprendizaje de los alumnos se relaciona con el acto de conceptualizar, de dar sentido, de utilizar oportunamente y de organizar conocimientos matemáticos. Numerosos trabajos han mostrado que el acto de aprender depende de manera importante de las actividades que los alumnos realizan en clase. Esas actividades, que ponen en juego lo que los alumnos piensan, dicen y escriben, están determinadas a su vez por los enunciados que se dan y por aquello que el profesor organiza durante el tiempo de la clase. Por supuesto, el aprendizaje depende también de otros factores que se salen de nuestro campo de investigación.

Por ejemplo, hemos mostrado que, con frecuencia, incluso cuando los maestros son muy calificados (Robert, 2003), las restricciones de tiempo,[9] agravadas por las restricciones de horario actuales llevan a privilegiar en clase un trabajo sobre "lo nuevo", sobre lo que acaba de ser aprendido. Hay, sin embargo, poca exploración de ese conocimiento nuevo y hay aún menos trabajo explícito por parte de los alumnos para actualizar sus conocimientos antiguos, tampoco se hace un trabajo de reorganización de lo nuevo con lo viejo. De hecho, el maestro orienta la actividad de los alumnos hacia lo nuevo, las fórmulas, las definiciones, las reglas y los teoremas. Esto lo hace al asumir la dirección de las actividades de manera precisa y rápida, incluso inmediata, por ejemplo, cuando toma la palabra desde que inicia la resolución en clase e indica, o hace que otros indiquen, a lo largo de la clase, lo que se "debe" hacer.

En términos de actividades, esto corresponde a tareas aisladas (tareas sobre el capítulo en curso), sin prácticamente ninguna adaptación de los conocimientos que se van a utilizar,[10] con una sobrecarga de cálculos que deben realizarse al final de la resolución, cálculos bien calibrados que casi todos los alumnos pueden resolver.

Rara vez los alumnos tienen la ocasión de apelar a conocimientos disponibles –conocimientos que tengan que identificar por sí mismos, sin ninguna indicación al respecto- ni tampoco a conocimientos diferentes a los que se trabajan en ese momento en clase, especialmente conocimientos antiguos. Se comprueba así, y esto podría reforzar la falta de organización de los conocimientos de los alumnos, una secuenciación de actividades relativas a una misma noción, en momentos relativamente independientes, ligados todos a lo que es nuevo: los alumnos hacen funcionar las nuevas herramientas unas después de las otras, independientemente, no necesitan más que conocimientos acumulados, los que corresponden al curso, y moldeados por el recorte organizado por el maestro. En esas condiciones, no hay necesidad de poner en juego medios de control.

No se puede asegurar que de esto resulten conocimientos fragmentados en los alumnos, ya que ellos aprenden incluso lo que no se les enseña explícitamente (y que por tanto les es "devuelto",[11] más o menos implícitamente). No obstante, es posible preguntarse si la queja reiterada de muchos observadores acerca de la falta de "conocimientos sólidos" en los alumnos tiene como origen este tipo de tra-

[9] Siempre son citadas por los maestros para justificar estos hechos.

[10] Los alumnos pueden utilizar los enunciados que se dieron en el curso tal cual, prácticamente sin ningún cambio.

[11] Véase Brousseau (1998).

bajo en clase. Esto se ve reforzado por el frecuente comentario que hacen los alumnos: "justo cuando comenzábamos a comprender, cambió el capítulo".

¿Y DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS MAESTROS?

Desde hace una decena de años se realizan en Francia investigaciones didácticas sobre las prácticas de maestros de matemáticas en clase. Nos referiremos aquí a las que se inscriben en el doble enfoque que hemos desarrollado con J. Rogalski (Robert, 1999, 2001, 2002; Robert y Rogalski, 2002, 2005): se trata de tener en cuenta el hecho de que las elecciones que hacen los maestros no pueden responder exclusivamente a las necesidades de aprendizaje de cada alumno, puesto que sus prácticas responden a sujeciones diversas, empezando por el hecho de que los alumnos son diferentes, heterogéneos. No solamente pesan los programas y los horarios.[12] Están también los otros colegas y los hábitos, los alumnos, los padres y la administración (componente social); está el componente personal hecho de concepciones y de valores personales, de conocimientos, de experiencias y de gustos.[13]

Además, otros resultados de investigación han mostrado que las prácticas de los maestros se vuelven rápidamente estables, es decir, difíciles de cambiar, debido a que traducen un equilibrio personal complejo y coherente entre todas las sujeciones que pesan sobre cada maestro (Montmollin, 1984). Pero todos esos equilibrios individuales, en germen desde que se instalan las prácticas, son diferentes, aun si existen ciertas regularidades globales.[14]

Las regularidades globales proceden tanto de las sujeciones que pesan sobre todos los maestros como de lo que añade el ejercicio del oficio (Clot, 1999): más allá de la variedad individual, ciertas decisiones no son tomadas por ningún maestro, aun cuando éstas parezcan responder a soluciones más eficaces en términos del aprendizaje de todos los alumnos. Por ejemplo, esperar que todos los alumnos hayan adquirido los conocimientos propuestos es casi imposible si la clase es demasiado heterogénea, incluso si esto es un buen recurso para que los

[12] Las prácticas se analizan según cinco componentes, los cuales se integran en un segundo momento: institucional, social, personal, cognitiva y de mediación.

[13] Traten de impedir a un apasionado de la informática o de la historia de las matemáticas proponer secuencias en computadora o partir de textos históricos; incluso si es un poco un aprendiz brujo o si no está muy seguro de los beneficios en términos de los aprendizajes, no lo lograran...

[14] Véanse Hache (2001), Roditi (2003), Vandebrouck (2002), Pariès (2004).

alumnos más atrasados progresen, pues es inadmisible dejar que los otros alumnos "pierdan el tiempo" y no terminen el programa. Otro ejemplo: muchos maestros no logran callarse durante más de 30 segundos en una clase después de haber propuesto un ejercicio para resolver, incluso por razones deontológicas;[15] aun estando absolutamente convencidos del interés que tiene propiciar la búsqueda por parte de los alumnos: guardar silencio parece incompatible con las costumbres de unos y otros. Es difícil no hacer "como los otros" especialmente a escala de un establecimiento, lo que vuelve todavía más difícil modificar ciertas prácticas si éstas permanecen aisladas.

¿Cómo hacer evolucionar las cosas?

Nuestra hipótesis es que es posible mejorar los aprendizajes escolares de los alumnos mediante formaciones de maestros que permitan a cada profesor organizar, en su clase, más actividades matemáticas portadoras de aprendizaje: formaciones específicas para las zonas de educación prioritarias que permitan conocer mejor los tipos de intermediarios que pueden ser utilizados con alumnos en dificultad, formaciones en las TIC que no se limiten a una iniciación en programas sino que aborden las cuestiones de la gestión del material y de la clase, formaciones de prácticas que permitan tener en cuenta realmente las actividades de los alumnos en relación con sus aprendizajes.

Lo anterior permite considerar la formación de los maestros de la manera siguiente: son los márgenes de maniobra, tanto individuales como colectivos, los que deberán ser trabajados en la formación para ser enriquecidos,[16] respetando las sujeciones insuperables de la profesión. Para provocar este desarrollo, los formadores deben ser formados, ya que se trata, insistimos, de ayudar a los maestros a superar los verdaderos obstáculos: a menudo no se trata de reproducir, ni siquiera de mejorar las prácticas existentes, sino de modificarlas, de enriquecerlas. Se trata de encontrar respuestas adaptadas a nuevas preguntas, algunas veces sin el apoyo de los estudios que permitirían tener ideas precisas y completamente validadas.

[15] El maestro está ahí para trabajar, no para callarse. Notemos que uno puede callarse y escuchar muy activamente a los alumnos, para comprender lo que hacen y resumirlo después y que ¡eso es bastante difícil!

[16] Nos ubicamos en la perspectiva muy general de una teoría del desarrollo.

Ciertamente, en el medio de los maestros, la idea de la formación profesional inicial está asociada esencialmente al "acompañamiento", a "la formación en la práctica", mediante un seguimiento cotidiano del principiante por un maestro experimentado. Aquí "formación en la práctica" significa "en la clase". A menudo, las formaciones que se imparten en grupo dentro del centro de formación se perciben de manera negativa. Es claro que, cuando no había más que una formación muy ligera (lo que se llamaba en Francia CPR), antes de 1991, hubo muy buenos profesores, pero los problemas no eran tan agudos ni tan masivos como ahora, y las necesidades y las condiciones sociales eran otras. Así, planteamos la hipótesis de que una formación "en la práctica", únicamente a partir de experiencias en clase, genera más fácilmente reproducciones que modificaciones y puede resultar insuficiente. Hay cosas importantes que no se ven cuando se permanece en clase, incluso con los "buenos" profesores. De hecho, la observación en clase no siempre es suficiente para percibir ciertos malentendidos sutiles[17] o demasiado burdos.[18] Además, tener experiencia no necesariamente es sinónimo de ser experto. Por ejemplo, una investigación reciente (Maurice, 2002) mostró que los maestros con mucha experiencia preveían menos bien que los novatos ciertas respuestas de los alumnos, debido a una ilusión de transparencia de sus propósitos como maestros, propósitos que ya no eran puestos en duda. En fin, los "buenos" maestros no necesariamente saben caracterizar por sí solos sus prácticas en su especificidad: ¿Qué es lo que ha "funcionado"? ¿Fue, por ejemplo, la selección de enunciados o bien las modalidades de trabajo en clase, o su combinación?

Finalmente, la transmisión "directa" de las investigaciones en didáctica a los maestros no se hace de manera adecuada. Varias investigaciones han mostrado, al menos respecto a temas precisos, como los decimales por ejemplo, que las ingenierías concebidas por los investigadores, a pesar de su robustez, no eran adoptadas por la mayoría de los maestros.[19] Varios factores pueden explicar esto en el nivel medio:

- La dificultad de adaptación para un profesor determinado, sobre todo si está solo (representaciones en contradicción con las de los que concibie-

[17] Invisibles sin cuestionar a los alumnos o sin analizar sus producciones ulteriores.

[18] Inconcebibles para un especialista, muy alejados de las relaciones con el saber de ciertos alumnos. Por ejemplo, la dificultad para utilizar la transitividad de la igualdad que tienen alumnos de primero de preparatoria no se percibe a través de la simple observación de una clase, ya que está muy lejos de las interpretaciones que se pueden hacer de las dificultades.

[19] Bolom (1996), Roditi (2001).

ron las ingenierías, o bien, aun en caso de convergencia de representaciones, diferencias entre el ideal didáctico y el posible (Robert, 2002).

- Hay muy pocas nociones del programa correspondientes a un mismo año escolar que hayan sido abordadas desde el punto de vista de la investigación.
- El trabajo de preparación anterior a la sesiones, a menudo importante, con eventuales desfases con respecto a los programas y muchos implícitos que deben descodificarse (con respecto al espíritu y no a la letra de la sesiones).
- El cambio de contrato demasiado importante con respecto a las costumbres, que requiere cierto tiempo para poder ser instalado.
- El tiempo "perdido" durante las sesiones (con frecuencia hay un trabajo importante autónomo de los alumnos), aunado al hecho de que no siempre hay resultados inmediatos.
- La atención requerida por la gestión de la sesiones: los alumnos pueden resistirse al cambio de contrato, resistirse a un trabajo un poco largo y no inmediato sobre la misma cosa, pueden tener dificultad para pasar de un trabajo autónomo a un momento de escucha colectiva.
- La dificultad para saber si "ocurrió" lo esencial de lo que se propuso quien concibió la ingeniería.

Una formación de formadores a la altura de las necesidades de formación de los maestros

Resumiendo, pensamos que para hacer evolucionar las prácticas tanto como es necesario, no basta con formar enseñando ("haz como yo") o diciendo ("haz lo que yo hago") a partir de la experiencia personal, incluso si esto es indispensable. La formación matemática inicial también es indispensable, pero no suficiente.

Nos proponemos formar formadores que puedan tanto ayudar a principiantes a echar a andar sus prácticas, como ayudar a maestros más experimentados a evolucionar frente a nuevas dificultades, y esto gracias a conocimientos suplementarios a los de los maestros. Estos conocimientos se apoyan en la experiencia de la enseñanza y contribuyen a darle sentido, al mismo tiempo que permiten a los formadores descentrarse de su propia práctica y trabajar sobre otras coherencias distintas a la suya, adaptando sus conocimientos, y enriqueciéndolos al renovarlos; podríamos hablar de experiencia informada.

¿QUÉ FORMADORES? ¡UN OFICIO QUE TAMBIÉN SE APRENDE!

Para precisar lo que ya se dijo, los formadores "con los que soñamos" conocen más que sus propias elecciones de enseñanza. Desde nuestro punto de vista, deben ser formados para:

- Analizar las prácticas en clase (en relación con las actividades de los alumnos).
- Identificar las diversidades (para poder concebir adaptaciones), conocer las regularidades (que corresponden a las sujeciones).
- Reflexionar sobre los dispositivos de formación.
- Trabajar sobre los recursos, la crítica y la utilización.

Para esto, deben tener conocimientos sobre los aprendizajes en clase, especialmente sobre los aprendizajes de los "nuevos" alumnos, las matemáticas, las prácticas de los maestros y su formación, sobre el sistema global y los recursos, para poder encontrarlos y utilizarlos en el momento oportuno.

Deben tener una idea de las alternativas así como de lo que es "imposible" en determinado nivel escolar respecto a un contenido dado, o al menos deben tener los medios para encontrar dichas alternativas.

Deben disponer de las palabras para decir las cosas que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas, incluidas las necesarias para traducir su propia experiencia, de la cual pueden entonces despegarse. Buscamos que todos tengan más o menos las mismas palabras, pues hay necesidad de continuidad en la formación.

Pero la complejidad del sistema implica que sus conocimientos deben estar, por una parte, ligados entre ellos (complejidad de la situación por tratar) y, por otra parte, deben ser críticos (para adaptarse e integrar "correctamente" más adelante nuevas investigaciones, por ejemplo). En particular, deben poder adaptar las propuestas a maestros con estilos diferentes, teniendo en cuenta las características de las prácticas en clase.

Finalmente deben desempeñar el papel de intermediarios entre investigadores y maestros, para permitir un aprovechamiento de los resultados de la investigación.

Así, volverse formador exige un tiempo largo y una ruptura, un cambio de postura... Parece necesaria, entonces, una verdadera formación, colectiva. La aparición de un libro sobre la enseñanza en el liceo (Lattuati, Penninckx, Robert,

1995) no nos parece de ninguna manera suficiente para desencadenar individualmente semejante evolución.

FORMACIONES DE FORMADORES

Una elección didáctica sobre la arquitectura global de la formación

Proponemos la siguiente elección: centrar la formación de formadores en el análisis de las prácticas de enseñanza de profesores de matemáticas en relación con las actividades matemáticas que aquéllas pueden provocar en los alumnos.

Se trata de hacer adquirir herramientas para analizar tanto las matemáticas enseñadas como los desarrollos en relación con las actividades de los alumnos. Además, las herramientas de análisis se ponen a prueba en un video que cada futuro formador filma en su clase y que luego se presenta a otros futuros formadores.

Los demás conocimientos que se busca desarrollar se "enganchan" en éstos. Los recursos (derivados principalmente de la literatura profesional) son estudiados por los futuros formadores en relación con las actividades de los alumnos y los profesores.

En esta perspectiva, los resúmenes y las críticas sirven para concebir usos con adaptaciones a partir de proposiciones o de investigaciones que pueden relacionarse con las prácticas en clase.

En cuanto a las nociones sobre formación y formación de adultos, las iniciamos relacionadas con las matemáticas de la clase en las reflexiones, a partir de la observación de experiencias existentes de formación de profesores, así como de la concepción de escenarios. En un segundo momento se aportan complementos sociológicos transversales (independientes del contenido).

Otras opciones que no recuperamos

La formación de formadores puede centrarse en los fenómenos psíquicos que pueden no ocupar parte del terreno de la clase. Es el caso de lo que propone C. Blanchard-Laville.

Nosotros adoptamos otro punto de vista: trabajar sobre lo que depende de la conciencia y la preconciencia. Dicho de otra manera, permanecemos en lo racional y hacemos como si las prácticas de enseñanza de los profesores fueran asunto de decisiones (pre)conscientes. Para al preparación de sesiones, esta elección parece bastante razonable, aun si intervienen otros factores, por ejemplo, en las anticipaciones que los profesores hacen en relación con los desarrollos (acompañamientos durante la sesión); es evidente que intervienen otros factores de manera más importante, sobre todo del orden de lo psicoanalítico. No los subestimamos, pero no los tenemos directamente en cuenta.

Existen también experiencias de formación fundadas sobre otras elecciones, como los análisis reflexivos sobre las prácticas que, contrariamente a lo que nosotros hacemos, no tienen específicamente en cuenta los contenidos enseñados.

Se podría también formar a los formadores mediante un trabajo sobre las prácticas lingüísticas de los profesores, considerando lo que éstas transmiten como omisiones, sobreentendidos e implícitos, y diferencias eventuales para los distintos alumnos. No hacemos sino iniciar este aspecto, el cual podría ser ampliado en un segundo momento, vinculado con los contenidos.

Dos tipos de actividades fundamentales en nuestra "idea" de formación de formadores: los análisis de videos de clases y la concepción de escenarios

El análisis de videos: análisis de contenidos de las actividades propuestas y desarrollo de las sesiones de clase con identificación de variables

El análisis de videos (Robert, 2004) se concibe para estudiar el binomio *enunciado matemático propuesto a los alumnos-actividades de los alumnos durante el desarrollo de la clase*. El término "enunciado" debe tomarse en el sentido amplio de "tarea", definida en relación con las matemáticas: puede tratarse de un ejercicio o de una situación para abordar con el profesor y el grupo, entre otros.

El objetivo esencial de este análisis es poder analizar lo que los estudiantes tienen que hacer en matemáticas e identificar lo que puede variar de una clase a otra, de un capítulo a otro, etcétera.

En un primer momento, nos interesamos por la naturaleza de las nociones matemáticas en juego a partir de los programas escolares, introduciendo tipos de nociones que difieren por su grado de generalización de los conocimientos anteriores (Robert, 1998). Nos dedicamos también a analizar los conocimientos por utilizar: se identifica si son viejos o nuevos, movilizables o disponibles, en caso de ser explícitos. Finalmente, se trata de calificar la naturaleza de la puesta en funcionamiento de esos conocimientos, precisando si se trata de aplicaciones inmediatas de los enunciados del curso o de adaptaciones, de las cuales se ha elaborado una lista precisa (Robert y Rogalski, 2002; Robert, 2005a).

Los análisis necesitan también de nuestro punto de vista para reconstituir las actividades de los alumnos y elaborar la descripción del desarrollo de las sesiones. Consideramos principalmente:

- Las formas de trabajo de los alumnos (individual o en pequeños grupos).
- La duración de los distintos momentos.
- Las ayudas del profesor, precisando su naturaleza y el momento en que se dan: recordatorios o recortes para preparar el trabajo, intervenciones en el curso del trabajo o al final de éste, reenvío de preguntas o respuestas directas a los alumnos que las plantearon, organización de intercambios entre alumnos, etcétera.

Reconstituimos también, tanto como es posible, las actividades que pudieron haber efectuado los alumnos; podemos poner en evidencia las actividades donde la autonomía de los alumnos es mínima (después de todas las intervenciones del maestro sobre la cuestión) y aquéllas donde es máxima (por ejemplo, antes de las intervenciones del profesor, cuando los alumnos responden a preguntas y aprovechan incluso pequeñísimos tiempos de silencio).

Nuestro análisis no nos da más que un acceso parcial a estas actividades (obviamente son en parte inaccesibles) que con frecuencia son diferentes de un alumno a otro. Se trata de reconstituir lo que las actividades de los alumnos pudieron haber sido, aun si esto es un poco virtual, "potencial": no todos los alumnos entran al mismo tiempo en actividad ni trabajan sobre las mismas cosas... Identificamos también los que es difícil o fuente de error para los alumnos, elementos frecuentemente marcados por intervenciones particulares del profesor, desorden o silencio total.

El esquema de actividades de formación de formadores a partir del video

Cada participante se filma en su grupo en el primer trimestre y presenta un análisis de un extracto de ese video en el segundo.

Todas las sesiones se organizan conforme al mismo plan: se deja un poco de tiempo a los participantes para buscar el ejercicio que se mostrará o reflexionar sobre el curso presentado y hacer un análisis *a priori* no "corregido": se observa el extracto, el profesor involucrado retoma el análisis, comenta el desarrollo, reconstituye las actividades de los alumnos, expone su proyecto y abre la discusión sobre el análisis y más generalmente sobre las alternativas previstas y las problemáticas, es decir, sobre las preguntas abiertas que pueden surgir a partir del video. Estas cuestiones no tienen respuesta definitiva, se expresan diferentes opciones y se profundizan en términos de variables.

Condiciones necesarias

Nos parece que estas actividades a partir del video cubren varias condiciones necesarias en formación, las cuales agrupamos en cuatro rubros.

Un trabajo de práctica y no sólo de aportes de conocimiento sobre la práctica (respeto a la complejidad)

Admitimos la siguiente hipótesis fuerte que no tiene nada de original y que no es específica de los profesores de matemáticas: no se trata sólo de hacer adquirir conocimientos exclusivamente matemáticos o exclusivamente pedagógicos; se trata de trabajar las prácticas efectivas. Se trata de articular en la formación los aportes de la práctica[20] y a la vez los aportes más teóricos[21] como *recurso* y objetivo de la formación.

De todas maneras, planteamos la hipótesis de que es difícil dejar a cargo del profesor en formación la recomposición de componentes de las prácticas demasiado aislados; creemos que se debe trabajar sobre elementos suficientemente "parecidos" a las prácticas, es decir, parcialmente superpuestos: trabajo simultáneo de contenido y de gestión en una sesión, o inclusive trabajo simultáneo de contenido para la clase y los programas en un ámbito más amplio...

De esta manera, en el análisis de videos se organiza obligatoriamente un trabajo simultáneo sobre los contenidos matemáticos enseñados y sobre el desarrollo de sesiones.

[20] Es decir, los aportes derivados de experiencias efectivas en clase.
[21] Derivados de la formación en el centro, por ejemplo.

Consideración de las sujeciones, los márgenes de maniobra y la tendencia de las prácticas a estabilizarse en el plano individual

Una de las características importantes de las prácticas de los profesores[22] que debe intervenir en su formación y en la de los formadores es la coexistencia de sujeciones exteriores a los profesores, explícitas u ocultas, que limitan las variables y los márgenes de maniobra a escala de cada individuo y, por otra parte, estilos individuales fuertes hacia los cuales el respeto es indispensable para un buen ejercicio de la profesión. Esto se multiplica debido a que las prácticas individuales son estables después de algunos años de ejercicio, aunque dicha estabilidad está en germen en los principiantes. Recordemos que esta estabilidad se apoya en las coherencias individuales y en el hecho de que las prácticas son complejas.

Lo anterior nos lleva a proponer un trabajo que explicite, por una parte, las sujeciones y las costumbres profesionales (institucionales y sociales: programas, horarios, alumnos, padres de familia y establecimientos) y, por otra parte, ponga en evidencia las alternativas posibles y los márgenes de maniobra de cada uno; esto implica toma de conciencia y un trabajo eventual de adaptación; demanda tiempo en el ámbito de una formación específica.

Los videos permiten la puesta en evidencia progresiva de las sujeciones y la reflexión sobre los márgenes de maniobra y las alternativas, así como el trabajo de identificación de variables.

Cuando se analiza un video, se está obligado a evocar el proyecto del profesor, y en el proyecto figuran siempre sujeciones. Los márgenes de maniobra que quedan deben entonces ponerse de relieve mediante un segundo trabajo de recomposición de todos esos datos. El trabajo sobre las alternativas virtuales, en nuestra perspectiva, es un buen intermediario para abordar la complejidad de esta situación.

Consideración explícita del hecho de que se forman adultos, profesores en ejercicio; un vocabulario específico y momentos colectivos bien preparados

Para tomar en consideración al público, adulto, en ejercicio (incluso los principiantes tienen como responsabilidad un grupo en el colegio o el liceo) nos apoyamos principalmente en trabajos sobre la conceptualización de la actividad y la importancia del colectivo en formación, que es, probablemente, una condición de ciertos cambios.[23]

[22] Esto es parte de los resultados de nuestras investigaciones en colaboración con los ergónomos.

[23] Véase Clot (1999).

Proponemos que esta puesta en juego del colectivo se haga por intermediación de un vocabulario adecuado y preciso, a fin de especificar la actividad profesional, y que la consideración de la experiencia se haga gracias a situaciones de formación adecuadas, *significantes para los formados*, actividades reales en las que ellos puedan a la vez aprender algo nuevo y no sólo pasar sobre el terreno (análisis de video, resolución de problemas profesionales, trabajo sobre la memoria profesional, acompañamiento de los profesores que acaban de asumir su primer puesto).

En los videos tienen lugar actividades reales, cercanas a la experiencia y a las necesidades y con un aspecto colectivo; cada clase es nueva y plantea otro problema. Esas actividades son "próximas" a la experiencia de los participantes y de sus necesidades. Por otro lado, la importancia de los trabajos prácticos, donde cada uno ocupa alternativamente distintos roles (actor, espectador y analizador), la preparación de rejillas de análisis comunes con palabras precisas utilizadas luego por todos, lleva a un trabajo colectivo real: durante las discusiones, en el análisis presentado –que interpela fácilmente a los participantes–, pero también cuando se trabajan las alternativas.

La necesidad de un tiempo largo

Finalmente, planteamos una última hipótesis fuerte que nos parece se impone en virtud de todo lo precedente: la necesidad de un tiempo largo ¡para cualquier tipo de formación!, lo cual es contrario a muchas de las costumbres actuales, sobre todo en formación continua.

En efecto, en nuestra opinión, la duración es necesaria para que pueda ocurrir cierta ruptura y permita al participante vincular lo que trabaja no sólo con sus propias prácticas y su experiencia, sino también con nuevos conocimientos más amplios, suficientemente apropiados para ser adaptados.

La concepción de escenarios

El trabajo organizado en pequeños grupos de 4 o 5 participantes se prepara mediante la observación de las formaciones existentes. Éstas permiten trabajar sobre lo que existe, planteando cuestiones pertinentes e ideando en probables modificaciones. La lectura de artículos de la literatura profesional alimenta este trabajo, proporcionando ideas de actividades. El escenario de cada grupo da lugar a una exposición colectiva.

Entre investigación y formación de formadores: ¿una didáctica profesional?

Nos parece importante subrayar las diferencias (transformaciones) entre las herramientas de las que disponen los investigadores en didáctica y lo que se utiliza en formación de formadores:

Desde el inicio, las herramientas de análisis de sesiones de clases (videos) se simplifican y se presentan de manera autónoma, sin muchas justificaciones. En cambio, en relación con las actividades de los alumnos organizadas por el profesor (las matemáticas, los enunciados, el desarrollo de la clase...), estas herramientas se utilizan como en la investigación.

Si las actividades de análisis de sesiones de clase son numerosas, éstas se hacen sin trascripción ni análisis completos de los contextos, ni modelos teóricos, contrariamente al uso en las investigaciones.

La introducción de sujeciones y márgenes de maniobra por intermediación de alternativas y problemáticas deviene una cuestión importante, lo que no es el caso en la mayoría de las investigaciones.

La proposición de secuencias se trata sólo como recurso y rara vez se imagina en formación de formadores. En cambio, un trabajo específico de crítica y de intento de adaptación de esas secuencias a las clases verdaderas puede resultar importante.

Por último, los resultados teóricos sobre las prácticas, los aprendizajes e incluso sobre la didáctica de matemáticas son muy modestos. Si no formamos didactas, sí esperamos que los formadores sepan suficiente didáctica para sacar partido de nuestras investigaciones actuales y futuras.

CONCLUSIÓN: EN FORMA DE PREGUNTAS

PREGUNTAS SOBRE LAS PRÁCTICAS DE LOS PROFESORES Y LAS INVESTIGACIONES

Las investigaciones en didáctica que dieron origen a este trabajo analizan las prácticas en un cierto nivel: entre el nivel micro (el de las acciones automatizadas, por ejemplo) y el nivel macro (el de la elaboración del proyecto de enseñanza fuera de la clase). Los indicadores retenidos permiten analizar los contenidos trabajados por los alumnos y los desarrollos en tiempos más o menos reales: es el *nivel local*, el de las improvisaciones controladas. Nos preguntamos si no hay otros indicadores, distintos de los que nosotros hemos introducido –que podrían someterse a prueba– para comprender bien este nivel.

Estas investigaciones dejan en la sombra muchos aspectos que intervienen en este nivel: los factores psíquicos, las prácticas lingüísticas, las pertenencias sociológicas; se centran en la investigación de itinerarios cognitivos que finalmente los profesores organizan en clase para los alumnos, al menos si se confía en los datos de observación recogidos directamente; dichas investigaciones analizan también elementos colectivos ocultos en las prácticas individuales: determinantes institucionales y sociales. Pero ¿es legítimo tal recorte, sobre todo cuando de ello se infieren conclusiones sobre la formación?

Por otro lado, uno de los conocimientos obtenidos a través de las investigaciones es la estabilidad de las prácticas, en el sentido de que un mismo profesor desarrolla prácticas análogas en situaciones comparables. Esto supone un cierto nivel para la descripción de esas prácticas, que nunca son exactamente iguales y menos todavía cuando el nivel del análisis es fino. Sin embargo, uno de los objetivos de la formación es la evolución de las prácticas: ¿cómo se combinan estabilidad y evolución?, ¿se puede suponer que los profesores ponen en funcionamiento esquemas que pueden actualizarse, incluso desplegarse, provocando un enriquecimiento de las prácticas?

Preguntas sobre la formación

Es posible distinguir diferentes componentes que pueden intervenir en la formación profesional de los profesores: toma de conciencia, actividades específicas (Robert, 2005b), escenarios que fijan las modalidades globales de esas actividades de formación y su organización. Están en juego modelos teóricos y prácticas de trasmisión: algunas proponen provocar toma de conciencia mediante análisis reflexivos sobre las prácticas o mediante discusiones organizadas entre colegas.

En el trabajo aquí presentado, y sin teoría explícita, podríamos evocar un modelo de *doble transposición*: los investigadores hacen una primera transposición de sus trabajos para trasmitirlos a los formadores que, a su vez, transponen y adaptan para los profesores que van a formar.

Otras preguntas conciernen a las especificidades de la formación inicial con respecto a otras formaciones: ¿por dónde comenzar, qué incluir para formar a los principiantes? Uno puede preguntarse, por ejemplo, si en la formación inicial no hay razones para introducir explícitamente alternativas ignoradas por los principiantes, que están elaborando sus referencias. En formación continua, en cambio, los profesores pueden tomar conciencia de sus decisiones analizando las de otros que tienen manera de identificar por comparación con las suyas.

Asimismo, algún trabajo sobre actividades elementales puede ser útil: por ejemplo, el hecho de poner atención al desorden y al silencio e intentar interpretarlos en relación con las matemáticas y no sistemáticamente en términos de disciplina.

Algunos formadores proponen a los principiantes secuencias "modelo", diferentes de las que habitualmente se utilizan en clase. Una estrategia es hacer trabajar a los principiantes con dichas secuencias, como si fueran alumnos (homología), o delegar en algunos el lugar del profesor y en otros el de alumnos, lo que no es muy factible en formación continua. En esta última, en cambio, se puede suponer que pequeños cambios, iniciados a partir de experiencias muy familiares, podrán contribuir a estremecer el edificio reforzándolo al mismo tiempo, un poco como un caballo de Troya (Groupe, 2002).

Preguntas sobre evaluación de la formación

Esta cuestión es muy vasta y poco abordada; en ella se mezclan varios niveles: el nivel de la formación, el de la práctica y el de sus efectos sobre los alumnos.

Nosotros intentamos, por ahora modestamente, poner en marcha evaluaciones en forma de seguimiento: por ejemplo, prevemos para el próximo año una formación de formadores trabajando con ellos sobre preguntas escritas dadas a los alumnos por algunos de ellos o por otros profesores, y pidiéndoles que ellos mismos analicen los enunciados del examen en relación con el trabajo organizado en clase y en la casa y de ahí saquen conclusiones. Esto da acceso al mismo tiempo a una cierta evaluación de nuestra formación, mediante la puesta en marcha de nuestras herramientas sobre las prácticas y las actividades de los alumnos, y a los resultados en bruto de los alumnos....

Este campo abre así perspectivas sobre numerosas investigaciones futuras: tanto acerca de la formación de formadores como sobre experiencias de formación de profesores por concebir y realizar; también sobre las prácticas de esos profesores y sobre sus efectos en los aprendizajes matemáticos de sus alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bautier, Rochex (1998), *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massification*, Francia, A Colin.

Blanchard-Laville, C. (2001), *Les enseignants entre plaisir et souffrance*, París, PUF.

Brousseau, G. (1988), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

Butlen, D., M.L. Peltier y M. Pezard (2002), "Nommés en REP, comment font-ils? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP: contradiction et cohérence", *Revue Française de Pédagogie*, núm. 140, pp. 41-52.

Chevallard, Y. (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-265.

Clot, Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*, París, PUF.

Douady, R. (1987), "Jeux de cadres et dialectique outil/objet", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 5-32.

—— (1992), "Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement", *Repères-Irem*, núm. 6, pp. 132-158.

Félix, C. (2004), "Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens: une perspective comparatiste", *Spirale*, Lille, núm. 33, pp. 89-100.

Hache, C. (2001), "L'univers mathématiques proposé par le professeur en classe", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núm. 1-2, pp. 81-98.

Lattuati M., A. Robert y J. Penninckx (1999), *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*, Ellipses.

Masselot, P. (2000), *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école –une étude de cas*, Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

Maurice, J.-J. y E. Allègre (2002), "Invariance temporelle des pratiques enseignantes: le temps donné aux élèves pour chercher", *Revue Française de Pédagogie*, núm. 138, pp. 115-124.

Montmollin (de) M., (1984), *L'intelligence de la tâche*, Berna, Peter Lang.

Pariès, M. (por aparecer), "Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves", *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Robert, A. (1998), "Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18, núm. 2, pp. 139-190.

Robert, A. (1999), "Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe", *Didaskalia,* núm. 15, pp. 123-157.

—— (2001), "Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 21, núm. 1-2, pp. 57-80.

—— (2002), "De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée)", *Didaskalia,* núm. 22, pp. 99-116.

—— (2003), "Tâches mathématiques et activités des élèves: une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe", *Revue Petit X,* núm. 62, pp. 61-71.

—— (2003), "Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation", *Petit X,* núm. 63, pp. 7-29.

Robert, A. y C. Hache (1997), "Un essai d'analyse des pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait 'fréquenter' les mathématiques à ses élèves pendant la classe?, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 17, núm. 3, pp. 103-150.

Robert, A. y J. Rogalski (2002), "Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche", *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies,* vol. 2, núm. 4, pp. 505-528.

—— (2004, en prensa), "A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th-Grade Class", *Educationnal Studies in Mathematics.*

Robert, A. y M. Rogalski (2002), "Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices –le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe", *Revue Petit X,* núm. 60, pp. 6-25.

—— (2004), "Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée", *Repères IREM,* núm. 54, pp. 77-103.

Robert, A. y F. Vandebrouck con la colaboración de P. Beziaud y D. Dumortier (2001), "Recherches sur l'utilisation du tableau après des enseignants de mathématiques en seconde pendant des séances d'exercices", *Cahier de Didirem,* núm. 36, Universidad de París 7.

Robert, A. y F. Vandebrouck con la colaboración de P. Beziaud y D. Dumortier (2003), "Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 23, núm. 3, pp. 389-424.

Roditi, E. (2003), "Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 23, núm. 2, pp. 183-216.

—— (2004), "Le théorème de l'angle inscrit u collège, analyse d'une séance d'introduction et perspectives pour la formation", *Cahier de Didirem,* núm. 45, IREM, Universidad de París 7.

Rogalski, J. (2003), "Y a-t-il un pilote dans la classe", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 23, núm. 3, pp. 343-388.

Vandebrouck, F. (2002), "Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques: à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants", *Cahier de Didirem,* núm. 42, Universidad de París 7.

Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10, núm. 2-3, pp. 133-170.

Vergnes, D. (2001), "Les effets d'un stage de formation en géométrie", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 21, núm. 1-2, pp. 99-122.

DATOS DE LOS AUTORES

Aline Robert
Instituto Universitario de Formación de Maestros (IUFM), Universidad de Versalles, Francia
robert@math.uvsq.fr

Nicolas Pouyanne
Universidad de Versalles, Francia
pouyanne@math.uvsq.fr

La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica[1]

Néstor Raymundo González Tovar y David Block Sevilla

Resumen: En la escuela primaria las fracciones se introducen a partir de la división de unidades entre un número entero (se divide un pastel, una pizza, una naranja, una barra de chocolate, etc.). Conservando este contexto, en el presente estudio se explora el potencial didáctico para el aprendizaje de la noción de fracción a partir de un tipo de problema prácticamente ausente en la enseñanza escolar en este nivel: la división de una fracción de unidad entre un entero. El estudio constituye una experiencia de microingeniería didáctica: con base en un análisis preliminar, se diseñó una secuencia de ocho situaciones didácticas que se aplicó en un grupo de quinto grado de primaria. Una parte del grupo de alumnos logró desarrollar procedimientos diversos para resolver la división de una fracción unitaria entre un entero, incluyendo un algoritmo. La división de fracciones no unitarias, en cambio, resultó considerablemente más difícil; se documentan todos estos procesos. Las dificultades que surgieron, principalmente debidas a los cambios de unidad de referencia de las fracciones, sugieren que, efectivamente, el estudio del tipo de problema planteado podría favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción como partes de unidad en este nivel escolar.

Palabras clave: fracciones, división de una fracción entre un entero, fracciones unitarias y no unitarias, ingeniería didáctica.

Abstract: In primary school fractional numbers are introduced from the division of units by a whole number (it may divide a pie, a pizza, an orange, a bar of chocolate, etc.). Conserving this context, in the present study the didactic potential of the division of a fraction of unit by a whole number is explored. The study constitutes an experience of didactic engineering: on the basis of a preliminary analysis, a sequence of didactic situations that was applied in a group of fifth grade was designed. A significative part of the group of students managed to develop

Fecha de recepción: 2 de diciembre de 2004.

[1] Artículo derivado de la tesis de maestría de N. González (2003), *La división de números fraccionarios entre números naturales; una experiencia didáctica*, DIE, Cinvestav.

diverse procedures to solve the division of a unitary fraction by a whole number, including an algorithm. The division of non-unitary fractions, however, was considerably more difficult. This process is documented. The difficulties that emerged, mainly due to the changes of the unit of reference of fractions, suggest, indeed, that the study of the posed problem could favor a deeper understanding of the notion of fraction like parts of a unit in this level.

Keywords: fractional numbers, division of a fraction of unit by a whole number, unitary fractions, non-unitary fractions, didactic engineering.

INTRODUCCIÓN

La operación sobre la que trata el presente artículo es la división de una medida fraccionaria entre un número natural.[2] Se estudia un proceso didáctico cuyo propósito es favorecer el aprendizaje de divisiones como las siguientes:

1/4 de metro entre 5 es 1/20 de metro
2/3 de metro entre 2 es 1/3 de metro, o 2/6 de metro

La división de una fracción entre un número natural no ocupa un lugar explícito en los programas de matemáticas de la primaria en México, aunque es posible encontrar en los textos oficiales para el maestro y para los alumnos algunas situaciones aisladas que la implican (se mencionan, por ejemplo, mitades de mitades o de cuartos).[3] El contenido "división de fracciones" aparece hasta la secundaria (alumnos de 11-15 años) y refiere al tema amplio de la división de una fracción entre otra fracción. El interés de realizar un estudio didáctico sobre un aspecto muy específico de este tema en quinto grado de primaria radicó en su posible potencial para favorecer una mejor comprensión de la noción de fracción, al propiciar reflexiones sobre aspectos como los siguientes:

[2] Las distintas definiciones, usos y significados de las fracciones, así como la manera de nombrarlos, varían de un investigador a otro (Ohlsson, 1988; Kieren, 1978; Mancera, 1992). Al hablar aquí de fracciones que funcionan como medidas, nos referimos a la interpretación de una fracción *a/b* como suma de *a* fracciones unitarias 1/*b*, y a su utilización para expresar medidas concretas, por ejemplo 3/4 de kg.

[3] Por ejemplo, Ficha 42 "Representa números en la recta numérica", del *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado*, México, SEP, 1994.

- La relación entre la parte y el todo: determinar la fracción que resulta de dividir una fracción de unidad entre un número natural implica establecer la relación que la parte resultante guarda con el todo.[4]
- Los efectos de las variaciones del numerador y del denominador sobre el tamaño de la fracción: a un numerador *n* veces mayor corresponde una fracción *n* veces mayor, a un denominador *n* veces mayor corresponde una fracción *n* veces menor.
- La noción de equivalencia: la fracción a/bn es *n* veces más pequeña que la fracción a/b (pues resulta de dividir esta última entre *n*), entonces, al tomar *n* partes de a/bn, se vuelve a tener una cantidad igual a la que se tenía originalmente, es decir, $a/b = na/nb$.

Aspectos de la metodología de la investigación

El estudio constituye una experiencia de ingeniería didáctica (Artigue, 1995; Solares, 1999; Ramírez, 2003). La principal característica metodológica de este tipo de experiencia es la manera de llevar a cabo el análisis de los resultados: se busca ponderar en qué medida los procedimientos de los alumnos observados a lo largo de la secuencia se relacionan con las condiciones intencionalmente creadas a través de las situaciones, y si en dichos procedimientos es posible identificar elementos que den cuenta de ciertos aprendizajes. La forma de validación de los resultados de la investigación es, por tanto, interna: se confrontan los datos del *análisis a priori* con los del *análisis a posteriori*. En el apartado siguiente se presentan algunos elementos del análisis previo realizado.

La secuencia didáctica fue de corta duración (ocho sesiones de clase y una de entrevistas a lo largo de dos meses) y abordó solamente un aspecto puntual del tema de división de fracciones, por lo que puede decirse que constituye una experiencia de *microingeniería*. Coincidimos con Ramírez (2003), quien advierte que, en este tipo de experiencias, ciertos aprendizajes pueden no manifestarse durante la experiencia didáctica, sino después, por lo que "en los estudios de microingeniería sólo es posible dar cuenta de aprendizajes que se manifiestan en el corto plazo, y conjeturar, valorando las condiciones particulares, la posibilidad de que otros aprendizajes se manifiesten más adelante". No obstante, la pertinencia de una experiencia didáctica, afirma también la investigadora, no se valora

[4] Behr *et al.* (1990) han estudiado los procesos de redefinición de la unidad en el trabajo con fracciones y han destacado su importancia en la construcción de esta noción.

únicamente a través de los aciertos visibles de los alumnos al realizar determinada tarea, sino también, por la calidad de las confrontaciones entre sus conocimientos previos y el medio con el que interactúan y por las maneras en las que los niños logran construir en la interacción formulaciones explícitas de determinadas ideas, aunque éstas sean todavía precarias o formalmente incorrectas.

El análisis previo de la secuencia didáctica estuvo precedido por una revisión curricular que permitió identificar las escasas situaciones en las que el conocimiento en juego estaba presente y, además, permitió comprobar que, ateniéndonos a los programas, los alumnos dispondrían de los antecedentes necesarios para abordar problemas que se plantearían. Las primeras situaciones aplicadas permitieron conformar lo anterior.[5]

El trabajo de campo se realizó en un grupo de quinto grado conformado por 30 alumnos, perteneciente a una escuela primaria urbana.[6] La aplicación de las situaciones didácticas estuvo a cargo de la maestra que imparte la materia de matemáticas en la escuela,[7] con la asesoría de uno de los investigadores que suscriben el presente texto.[8] La recuperación de los datos corrió a cargo de dicho observador. Se optó por obtener información del desempeño de la mayor parte posible del grupo, turnando los equipos que fueron observados, lo cual permitió tener una visión general del desempeño del grupo completo, pero no un seguimiento por alumno. Por lo anterior, este trabajo presenta únicamente tendencias de respuestas dentro del grupo, o resoluciones de uno o dos alumnos de cada equipo, pero no de todos los integrantes. El corpus de datos que fue analizado estuvo constituido por el registro tomado por el observador, las hojas de trabajo de los alumnos y los análisis previos.

[5] Los aspectos que se abordan en los análisis previos de las ingenierías didácticas varían de una investigación a otra. Suelen abordarse cuestiones sobre la naturaleza del conocimiento que es objeto de enseñanza (estudio epistemológico), sobre las formas en que se ha enseñado, sobre las concepciones de los estudiantes, incluidas las dificultades u obstáculos en relación con dicho conocimiento y, finalmente, sobre las condiciones de distinto orden a las que deberá sujetarse la experiencia didáctica (Artigue, 1995).

[6] La escuela pertenece a un sindicato universitario. La población es de nivel socioeconómico medio.

[7] En esta escuela, a diferencia de la mayoría de las escuelas primarias públicas, en quinto y sexto grados de primaria hay un profesor especial para la clase de matemáticas.

[8] La asesoría a la maestra consistió en una plática inicial sobre la secuencia y su propósito y, al término de cada clase, un intercambio de comentarios sobre la sesión, así como la revisión de la ficha de la clase siguiente.

VARIABLES DIDÁCTICAS DE LA SITUACIÓN DE DIVISIÓN

El diseño de la secuencia de situaciones se hizo a partir de la identificación de algunos problemas para los cuales el conocimiento en juego podía constituir una herramienta de solución; se identificaron algunas variables didácticas[9] de dichos problemas, anticipando sus efectos sobre los procedimientos de los alumnos. La situación central de la secuencia se diseñó procurando crear una situación "adidáctica" en el sentido de Brousseau (1998).

A continuación, se destacan algunas variables de una situación de división de una fracción entre un número natural. En la experiencia que se relata más adelante, algunas de las variables se mantuvieron fijas en determinado valor, mientras que otras se hicieron variar en aras de favorecer determinados aprendizajes. La presentación del conjunto de variables permite apreciar una parte de la extensión del campo de problemas relativo a la operación que nos interesa y su vinculación con las técnicas para efectuar la división. También permite ver el recorte que hicimos en el presente trabajo.

ELECCIÓN DE UN TIPO DE PROBLEMA: DIVISIÓN REPARTO

Los dos significados principales que se suelen asignar a la división en el conjunto de números naturales, "repartir" y "agrupar" (o determinar cuántas veces una cantidad es igual a otra),[10] se mantienen cuando intervienen fracciones en el problema, siempre y cuando el dato que desempeña el papel de "número de veces" sea entero. Por ejemplo, un problema de división tipo "agrupamiento" o "comparación", como determinar el número de tramos de 3/4 de metro que se necesitan alinear de extremo a extremo para obtener un tramo de 3 3/4 de metro, no presenta dificultades importantes, pues el cociente (número de veces) es entero. El problema puede resolverse mediante la suma repetida o mediante aproximaciones sucesivas multiplicando por números naturales. Asimismo, un problema como "repartir 1/3 de pastel entre 5 niños", conserva el sentido del reparto conocido por los alumnos, en este caso, obtener 5 partes del mismo tamaño sin que sobre, o bien, obtener una cantidad que repetida cinco veces sea igual a 1/3 de pastel.

[9] Las variables cuya manipulación puede tener efectos en los procedimientos de resolución se llaman "variables didácticas" en la teoría de las situaciones didácticas.

[10] Sobre estos significados pueden consultarse Schwartz (1988), Martínez (1997) y Martínez y Moreno (1996).

Aunque en este caso la técnica para resolver no es la misma que se utiliza en los naturales (reparto cíclico, por ejemplo), los alumnos disponen de recursos para aproximarse a una solución, como la partición física por ensayo y error.

En cambio, cuando el número de veces no es entero, cualquiera de los dos tipos de problemas mencionados implica una reconceptualización de la noción de multiplicar (y de dividir), por ejemplo, el problema "si un automóvil consume 12.4 kilómetros por litro, ¿cuánto consume en 3 kilómetros?" implica determinar cuántas veces 12.4 es igual a 3 (o qué parte de 12.4 es 3).[11]

En el presente estudio se trabajó con los problemas presumiblemente más sencillos, los de partición con divisor entero (el divisor cumple el papel de número de veces). Este mismo tipo de problema subyace en la construcción de las fracciones que prevalece en la primaria, donde una medida fraccionaria surge de una partición de la unidad. El problema de dividir una medida fraccionaria implicará, por tanto, una composición de dos particiones sucesivas, por ejemplo, 1 unidad entre 3 igual a 1/3 de unidad y 1/3 de unidad entre 5 igual a 1/15 de unidad.

Elección de un tipo de magnitud, la longitud, y de la variable fracción unitaria-no unitaria

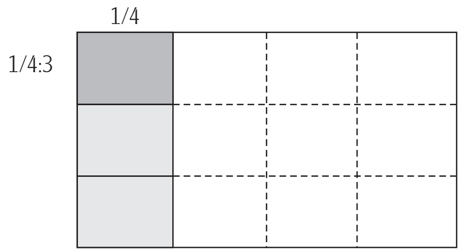
Para elegir la magnitud con la que se trabajaría en la experiencia redujimos de entrada las posibilidades a dos: la superficie y la longitud, debido a que estas dos magnitudes permiten una manipulación sencilla de los objetos portadores, facilitan las representaciones gráficas y son además con las que los alumnos han tenido más experiencia escolar, según los programas. A continuación, analizamos algunas características de la división con estas dos magnitudes, así como los procesos de resolución que permiten, considerando otra variable, el carácter unitario o no unitario de la fracción que se divide.

División de fracciones unitarias de superficie

El caso particular de una superficie rectangular facilita un procedimiento gráfico para realizar la doble partición y la determinación de la fracción resultante, gracias a la doble dimensión, largo y ancho. Por ejemplo, para dividir 1/4 de unidad

[11] Un análisis amplio sobre los sentidos de la división de números racionales puede consultarse en Brousseau (1988).

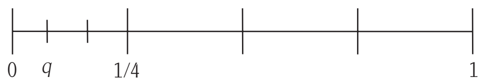
entre 3, puede dividirse la superficie en cuatro a lo ancho y en tres a lo largo, lo que permite determinar que las partes resultantes estarán en términos de doceavos.



Cabe observar que el hecho de que este modelo facilite ilustrar el proceso de dividir una fracción entre un entero no significa necesariamente que sea sencillo de poner en juego por iniciativa de un aprendiz, pues contiene decisiones difíciles de anticipar: la de partir usando las dos dimensiones; la de partir todo el rectángulo cada vez y no sólo la parte que interesa. Supone, además, poder "leer" el resultado, esto es, interpretar el gráfico para determinar el numerador y el denominador.

División de fracciones unitarias de longitud

Por ejemplo, para 1/4 entre 3:

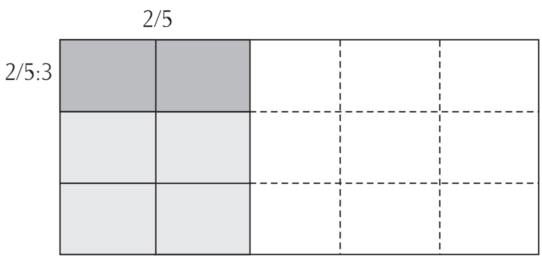


Para saber qué fracción de la unidad original representa la parte resultante (q), es posible, al igual que en el caso de superficie rectangular, subdividir los demás cuartos en tres partes cada uno y contar el total de partes en que quedó dividida la unidad. Es probable que esta representación propicie, en mayor medida que la del rectángulo, la idea de determinar cuántas veces cabe q en toda la unidad mediante una multiplicación: q cabe 3 veces en 1/4 de unidad y 1/4 de unidad cabe 4 veces en la unidad, por lo tanto, q cabe 4×3 veces en la unidad, es decir, q es 1/12 de la unidad.

En el caso de fracciones no unitarias, la diferencia entre los procedimientos que permiten los dos modelos (superficie y longitud) es mucho mayor, como se verá enseguida.

División de fracciones no unitarias de superficie

Con el modelo del rectángulo, el mismo procedimiento que se vio para fracciones unitarias permite encontrar el resultado de dividir una fracción no unitaria. Por ejemplo, para 2/5 de unidad entre 3, se puede hacer una primera partición a lo ancho en quintos, de los cuales "se toman dos", y después, a lo largo, una segunda partición en tercios (sobre los 2/5), de los cuales "se toma uno". El denominador de la fracción resultante, considerando a la unidad original, es el número de cuadritos en que quedó dividido el rectángulo completo.



2/5:3 = 2/15

División de fracciones no unitarias de longitud

Cuando la medida fraccionaria que se divide es una fracción no unitaria, el problema, utilizando longitudes, deviene significativamente más complejo. Veamos un ejemplo: 2/5 entre 3.

En este caso, no es posible determinar cuántas veces cabe la parte resultante *q* en la unidad mediante la sola representación gráfica o mediante manipulaciones del material, pues dicho número de veces no es entero, es decir, la fracción resultante no es unitaria, como lo fue en el caso anterior. El recurso gráfico tampoco sugiere un procedimiento de cálculo. La resolución deberá ocurrir, por tanto, en el registro de las relaciones numéricas.

En el registro numérico, la diferencia entre la división de una fracción unitaria y la de una fracción no unitaria es similar a la que existe entre una división de enteros como 1:3 y una como 2:3. En la primera, la determinación de la fracción es inmediata (1/3) mientras que en la segunda no, excepto si se dispone ya de un algoritmo o de la definición de fracción como cociente de enteros.[12] Este último problema fue estudiado por Solares (1999), quien, para que los alumnos establecieran que el cociente de *a* unidades entre *n* es *a/n* de unidad, exploró el siguiente camino:

$$a \text{ entre } n = a \text{ veces } (1 \text{ entre } n) = a \text{ veces } 1/n = a/n$$

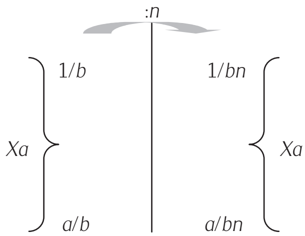
Por ejemplo, el resultado de 2 unidades entre 3 es el doble que el de 1 unidad entre 3, por tanto, es 2 veces 1/3, es decir, 2/3 de unidad.

La división de una fracción no unitaria de longitud podría resolverse de manera similar, cuando los alumnos ya saben dividir fracciones unitarias:

$$a/b{:}n = a \text{ veces } (1/b \text{ entre } n) = a \text{ veces } (1/nb) = a/nb$$

Por ejemplo, el resultado de 2/5 de unidad entre 3 es el doble que el de 1/5 de unidad entre 3, por tanto, es el doble de 1/15, es decir, 2/15.

Este procedimiento pone en juego la relación proporcional entre el dividendo y el cociente, cuando el divisor es constante:



[12] En México, como en muchos otros países, las fracciones no unitarias se enseñan en la escuela primaria a partir de las fracciones unitarias (o "partes de unidad"), por lo que una fracción como 3/4 significa 1/4 + 1/4 + 1/4 y no 3:4. Por lo tanto, para los alumnos no es evidente que el cociente de una división como 3:4 sea la fracción 3/4 (Block y Solares, 2001).

Opción por la longitud

En el presente estudio decidimos utilizar el referente de la longitud en la experiencia de ingeniería didáctica por los siguientes motivos:

- El modelo de la superficie del rectángulo podría ser mucho menos accesible de lo que parece a primera vista debido a las decisiones que deben tomarse para hacerlo funcional (efectuar cada una de las particiones en cada lado del rectángulo y partir todo el rectángulo en la segunda partición).
- El procedimiento gráfico para dividir fracciones no unitarias que se desprende del modelo del rectángulo (dividir a lo largo y a lo ancho) no es transferible a otras magnitudes.
- Para comprender una operación aritmética, no suele ser suficiente que los estudiantes tengan experiencias de construcción de la operación con un único modelo.
- El modelo de la longitud presenta una mayor exigencia en el nivel de las relaciones numéricas.
- El modelo de la longitud ha sido menos explorado que el de la superficie.

Cabe añadir que la dimensión longitud presenta otra ventaja con respecto a la superficie en cuanto al diseño de la situación didáctica: cuando se hacen particiones, no aparecen, como en el caso de las superficies, formas distintas con misma medida, lo cual facilita la comparación de las partes que los alumnos generan al dividir y, por tanto, la verificación empírica.

Una consecuencia de esta elección es que, en la experiencia que realizamos, fue importante la variable "fracción unitaria o fracción no unitaria". Se buscó que los alumnos establecieran, primero, un algoritmo para dividir fracciones unitarias y, después, se exploró la posibilidad de que lo utilizaran como estrategia de base para construir el algoritmo más general para fracciones no unitarias. Así, un objetivo específico en este trabajo fue el siguiente:

> Analizar la factibilidad de que los alumnos utilicen la división de una fracción unitaria como estrategia de base para construir otra estrategia más general, que permita dividir fracciones no unitarias (González, 2003).

Finalmente, aclararemos que, aunque en este estudio nos interesamos por la magnitud longitud, en una propuesta didáctica el estudio de las superficies rectangulares no debe excluirse; al contrario, es quizá el más adecuado para iniciar.

OTRAS VARIABLES NUMÉRICAS

Cuando el numerador de la fracción es múltiplo del divisor, la división puede hacerse mediante la división del numerador, por ejemplo, 6/7 de U entre $2 = (6{:}2)/7$ de $U = 3/7$ de U. Probablemente este caso particular presenta menos dificultades, pues la manera de dividir se asemeja a la de los naturales (se divide la cantidad de "partes" indicada por el numerador, concebidas como subunidades, dejando de lado el denominador). Debido a las limitaciones de tiempo, sólo estudiamos el caso más complejo y general en el que el numerador no es múltiplo del denominador y en el que, por consiguiente, es necesario operar sobre el denominador.

En la selección de valores numéricos, se optó por números pequeños que facilitaran las manipulaciones del material y la elaboración de representaciones gráficas. Los divisores fueron, al principio, potencias de 2, pues permiten la división física por mitades sucesivas,[13] posteriormente se usaron otros divisores.

Más adelante se presentan otras características de las situaciones que tienen que ver con el acondicionamiento del medio concreto en el que se plantea el problema, en particular, con el papel que se le hizo desempeñar al material concreto en la búsqueda del resultado.

ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DISEÑADAS

La secuencia está compuesta por tres partes. En la parte I, "Usos de la hoja rayada" de tres sesiones, se buscó que los alumnos aprendieran a utilizar un entramado de líneas paralelas equidistantes para realizar particiones de segmentos, con la idea de que utilizaran este recurso en el trabajo posterior. Se planteó también una primera situación que propiciaba la realización de una doble partición, por ejemplo, dividir un segmento en 14 partes, disponiendo de una hoja con solamente 10 rayas paralelas, lo cual podía hacerse, por ejemplo, dividiendo el segmento primero en dos y luego, cada mitad en siete. Puesto que el recurso de la hoja ra-

[13] Esta manera de dividir es la primera que logran dominar los alumnos en sus primeras experiencias de partición (Piaget, 1960).

yada prácticamente no fue retomado por los alumnos en las situaciones sucesivas y que en la situación de doble partición participaron muy pocos niños, no comentaremos aquí los resultados correspondientes a esta parte.

La parte II constó de cuatro sesiones. Se dedicó al desarrollo de procedimientos para dividir fracciones unitarias entre un número natural. Como se verá más adelante, la situación "Forma tus banderas", que se aplicó en la primera sesión, no funcionó adecuadamente, por lo que en la segunda y en la tercera sesión se optó por plantear otras situaciones más simples pero con el mismo propósito. En la cuarta sesión, se aplicó la situación "¿Cómo lo anotamos?", con la cual se buscó que los alumnos hicieran explícitas las operaciones en juego y se apropiaran de la notación correspondiente.

Por último, en la parte III se exploró una situación de división de fracciones no unitarias a lo largo de dos sesiones, la primera en clase y la segunda fuera de clase, con grupos pequeños de alumnos.

Parte I			Parte II				Parte III	
"La hoja rayada"			(Fracción unitaria entre naturales)				(Fracción no unitaria entre naturales)	
(a)	(b)	(c)	(a) Situación "Forma tus banderas"	(b) Situación simplificada	(c) Afirmación evaluación	Situación "¿Cómo lo anotamos?"	(a) 2/5:3	(b) 3/5:3; 4/5:3 4/5:5

En lo que sigue se presentan algunos resultados de las partes II y III.

RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

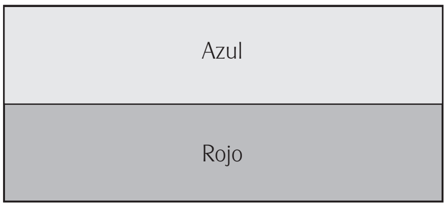
Una de las situaciones centrales revela deficiencias de diseño

Para propiciar el aprendizaje de la división de fracciones unitarias, en la parte II de la secuencia se intentó diseñar una situación que cumpliera con las características de una situación adidáctica,[14] a saber:

[14] Una situación relativa a un conocimiento es "adidáctica" cuando por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia en el jugador (Y. Chevallard *et al.*, 1998, p. 215).

- Que diera lugar a la división de una medida fraccionaria entre un entero.
- Que exigiera la determinación de la medida fraccionaria resultante con referencia la unidad original (si la división es por ejemplo 1/3:4, no debe ser suficiente contestar "1/4", sino "1/4 de 1/3", o "1/12").
- Que permitiera acercamientos al resultado a quienes no dispusieran del conocimiento en juego.
- Que permitiera una validación empírica de las medidas obtenidas.

Para tal fin se diseñó la situación "Forma tus banderas": cada equipo debe formar una bandera con dos pequeños tramos rectangulares de cartoncillo de colores distintos, por ejemplo uno rojo y otro azul, como se muestra en la ilustración.



El tramo azul lo obtenían de una doble partición: primero el maestro daba al equipo la cuarta parte de una tira larga de cartoncillo azul (la cortaba en cuatro a la vista de todos) y después, dentro de cada equipo se repartían aquel cuarto entre los integrantes. El tramo rojo debían solicitarlo por escrito a otro equipo, el cual solamente disponía de tiras rojas largas, del mismo tamaño que las tiras largas azules de las que se obtuvieron los primeros tramos. Los equipos debían lograr que sus dos tramos fueran del mismo tamaño. El uso de la regla graduada estaba prohibido. Esperábamos que los alumnos tuviesen que proporcionar la medida del tramo solicitado tomando la tira larga como unidad y, por lo tanto, que expresaran con fracciones el producto de la doble partición, por ejemplo: si el tramo azul se hubiese obtenido partiendo un cuarto de tira entre 5 integrantes del equipo, la medida del tramo rojo que debían solicitar hubiese sido "1/4 entre 5" o bien "1/5 de 1/4" o, por último, "1/20". Al recibir el tramo solicitado, los alumnos tendrían la posibilidad de verificar si el mensaje enviado había funcionado bien o no.

La situación anterior no funcionó adecuadamente por varios motivos, entre los que cabe destacar los siguientes:

- El hecho de que la fracción de tira que los equipos reciben para repartírsela entre sus integrantes sea la misma para todos, por ejemplo, un cuarto de tira, favoreció que tanto emisores como receptores consideraran tácitamente a esa fracción como nueva unidad, dejando totalmente de lado la unidad inicial, la tira larga. Con ello, los emisores se limitaron a comunicar en sus mensajes la fracción derivada del reparto que hicieron entre los integrantes de su equipo, evitando la división de una fracción (por ejemplo, si el tramo que se les entregó fue de 1/4 de tira completa y si el reparto fue entre cinco, escribieron únicamente "1/5" y no "1/5 de 1/4" o "1/20"). Sus mensajes fueron bien interpretados por los receptores, pues éstos asumieron también que la fracción que se les comunicaba refería al tramo de 1/4 de tira que la maestra entregó a todos los equipos y no a la tira completa. Para corregir esta deficiencia, es necesario entregar a cada equipo una fracción de tira distinta, sin que los receptores la conozcan.
- La maestra no explicó el propósito de los mensajes (debían servir para que los receptores supieran de qué tamaño debían ser los tramos azules de las banderas) y, en vez de ello, solicitó directamente que escribieran la medida de sus tramos rojos. Esta modificación parece manifestar el hecho de que, en las situaciones que comúnmente se plantean en clase, se suele solicitar de manera explícita a los alumnos el conocimiento que se espera que utilicen.

La situación se reveló, además, difícil de llevar a cabo. Como se verá enseguida, mediante una situación más sencilla, aunque sin todas las características de una situación "adidáctica", fue posible propiciar el estudio del tema en cuestión. En los comentarios finales volveremos sobre este hecho.

A partir de la segunda sesión (de la parte II), se planteó a los alumnos el problema de la división de una fracción de una manera más simple y directa, aunque sin un contexto que diera cierta funcionalidad al recurso al que apuntamos y sin la posibilidad de validar empíricamente los resultados. No obstante, casi todos los alumnos comprendieron el problema planteado, desarrollaron algunos procedimientos para abordarlo y algunos avanzaron hacia un procedimiento sistemático de resolución. Esto es lo que se presenta a continuación.

La situación modificada para la división de fracciones unitarias

En la sesión 2 de la fase II, la maestra retomó dos de los mensajes escritos por los niños en la sesión anterior, cuando se aplicó la situación original:

A cada uno de los integrantes le tocó 1/1 y en total fue: 6/6 R = 6 partes Equipo Celaya	La tira la dividimos en 5 partes porque nuestro (equipo) es de 5 niños y a cada niño le tocó 1/5 Equipo Koalas

En ambos mensajes los alumnos comunicaban la medida del tramo de tira indicando únicamente la división entre el número de integrantes de su equipo y, por tanto, dejando de lado que la tira que se repartieron era, a su vez, 1/4 de otra tira. La maestra leyó en voz alta el mensaje del equipo Celaya y dio la siguiente consigna:

> **M**: Recordando que sólo les di un cuarto de tira, acuérdense que se lo repartieron (el 1/4 de tira amarillo) en partes iguales... lo que van a discutir por equipos es si en verdad les toca un sexto o cuánto le tocó a cada niño.

Enseguida, entregó a cada equipo[15] varios ejemplares de las tiras largas de cartoncillo (las cuales hacen las veces de "enteros") de color amarillo para que hicieran las verificaciones que necesitaran. A partir de este momento, el contexto de las banderas funcionó únicamente como contexto evocado, como telón de fondo de la actividad.

Procedimientos de los alumnos para la división de fracciones unitarias (parte II de la secuencia)

En la primera aplicación de la situación modificada (sesión 2 de la segunda parte), pocos alumnos lograron determinar la medida de 1/4 de tira entre 6. A continuación se presentan las principales dificultades y la manera en que finalmente la lograron resolver.

[15] Los 30 alumnos estaban distribuidos en ocho equipos de entre tres y cuatro alumnos.

Omiten la unidad de referencia

En tres de los ocho equipos (12 alumnos aproximadamente) volvieron a contestar tomando al cuarto de tira que se les entregó inicialmente como unidad (para 1/4 de tira entre 6, dan como respuesta, nuevamente, 1/6 de tira). Por la falta de validación empírica, los alumnos no identificaron el error, pero éste fue destacado en el momento de la puesta en común.

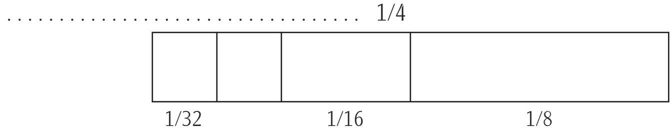
Sólo usan fracciones derivadas de las particiones en 2^n

En dos equipos, una primera dificultad fue no poder superar la partición sistemática en mitades para lograr una partición entre un número distinto a 2^n. En un equipo la dificultad se manifestó en el nivel de la partición física: intentaron partir su tira doblando en mitades. Para 1/4 de tira entre 6:

> **Alumno del equipo 7:** *[dobla una vez su tira a la mitad, desdobla y ve que le salen dos partes iguales; la dobla dos veces consecutivas a la mitad, la desdobla y ve que le salieron cuatro partes; dobla tres veces consecutivas a la mitad su tira, desdobla y ve que le salieron ocho partes]* ¡Ay, es que no salen!

Los alumnos se las arreglaron para obtener finalmente un número de partes (desiguales) distinto a 2^n, mediante la partición en mitades: después de un primer doblez a la mitad, hacen el segundo doblez a la mitad únicamente sobre una de las mitades anteriores y así sucesivamente. Asignaron fracciones a cada parte sin perder de vista que la tira que dividieron era 1/4 de otra tira, pero con una partición en partes desiguales, por ejemplo:

> **Diego:** (para "1/4 de tira entre 6", dibuja)

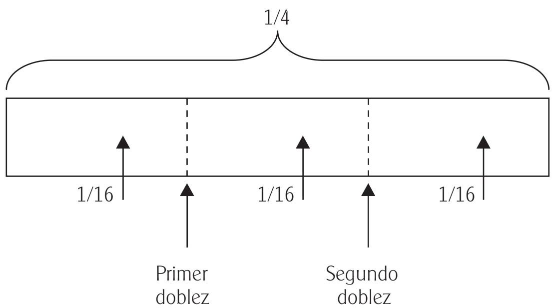


> [*toma un cuarto de tira, hace un doblez a la mitad y después, una de las mitades otra vez a la mitad*] Si el equipo fuera de uno le tocaría 1/4 [*desdobla el 1/4 de tira y lo muestra al grupo*] Si... dos personas [*dobla el cuarto*

de tira a la mitad y luego lo desdobla] 1/8, tres personas [*dobla 1/8 a la mitad y señala una de las partes obtenidas*] 1/16 [*duda*] Si fuera 1/4... a una persona le toca 1/4. Si fuera dos personas, a cada uno... 1/8. Si fueran 3... 1/16. Si fueran 4... 1/32, pero si fueran 6, un...

En otro equipo la dificultad se manifestó en el nivel numérico: un alumno logró dividir físicamente su cuarto de tira en tres partes aproximadamente iguales, pero, para asignar la fracción que correspondería a una de las tres partes, estableció una relación entre el número de dobleces y las fracciones que se obtienen, como si los dobleces fueran en mitades sucesivas.

Alumno: "con un doblez se obtienen dos partes de 1/8, si son dos dobleces entonces resultan tres partes de 1/16".



Estas dificultades parecen constituir manifestaciones distintas del proceso primigenio de partición en mitades sucesivas (Dávila, 1992). Dejan ver también que, posiblemente, los casos más accesibles de obtención de una fracción de fracción son aquellos que se desprenden de la partición sucesiva en mitades.

Establecimiento de un procedimiento sistemático

En el primer problema (1/4 entre 6) únicamente dos alumnos lograron determinar la medida buscada (1/24). La encontraron mediante el procedimiento previsto: para determinar cuál parte de la unidad completa representa el pedazo obtenido, consideraron que cada cuarto de la unidad debe dividirse entre 6 y que, por tanto, el número de subdivisiones que se obtiene es 4 por 6:

Ireri: Sería tan fácil como decir "cada cuarto en 6 partes... 6 × 4, 24" a cada uno le toca 1/24... Si este 1/4 está en 6, y cada uno está en 6 partes, entonces 24 veinticuatroavos es un entero.

Este procedimiento, presentado en la puesta en común, fue rápidamente adoptado por otros alumnos.

En la puesta común se presentó también otra manera de dar cuenta de la medida en juego, mediante una fracción de fracción: 1/6 de 1/4. Los alumnos que participaron en la discusión rápidamente determinaron que esa manera de expresar el resultado era equivalente a la anterior (1/24), pero la rechazaron porque no cumplía con la condición de usar una sola fracción.

Cuando se planteó el segundo problema (1/4 ÷ 5) en la misma sesión 2 de la segunda parte, en seis de los ocho equipos pudieron replicar el procedimiento explicado por Ireri y encontrar 1/20.

Afirmación y justificación del procedimiento

En la sesión 3 (de la parte II) se plantearon dos actividades más. En la primera se presentaron varias divisiones como las anteriores, variando un poco el dividendo y el divisor (1/4:6; 1/5:3 y 1/5:10). En todos los equipos pudieron aplicar el algoritmo recién establecido para dividir fracciones unitarias. Algunos alumnos intentaron evitar la dificultad relativa al cálculo, expresando el resultado como una fracción de fracción, por ejemplo, ante la división 1/5:3, contestaron "un tercio de un quinto" en vez de 1/15, por lo cual fue necesario añadir la condición de expresar el resultado con una sola fracción. No obstante, dicha forma de expresar el resultado permitió analizar la relación entre las dos expresiones y establecer la equivalencia.

En la segunda actividad los alumnos debían únicamente calificar como correctos o incorrectos resultados dados y justificar la calificación: se planteó el reparto de 1/3 de tira entre 7 y se preguntó si el resultado podía ser "tercios de tira" o si podía ser "séptimos de tira" (sin especificar el numerador). Los argumentos mediante los cuales los alumnos rechazaron ambas posibilidades mostraron, en la mayoría de los casos, un grado satisfactorio de comprensión de la operación en juego, por ejemplo:

Si se dividen tercios el resultado no puede ser otra vez tercios.
El resultado debe ser menor a tercios.
El resultado en tercios está mal porque deben ser veintiunavos.

Una respuesta interesante porque establece la relación entre el resultado correcto (1/21) y el incorrecto (1/7) fue la siguiente:

(No es séptimos porque) nos está dando un resultado 3 veces menor.

Considerando las resoluciones de los alumnos en las actividades anteriores, es posible afirmar que una parte del grupo, por lo menos un integrante de cada equipo, manifestó poder dividir una fracción unitaria entre un entero y poder explicar el procedimiento.

La representación de la operación

En la última sesión de esta parte II de la secuencia, se retomó una de las divisiones ya resueltas (1/5 de tira entre 3 niños) para plantear un problema distinto: ¿qué operación se hizo?, ¿cómo podría anotarse? Hasta este momento los alumnos habían tenido que representar por escrito solamente los resultados de la operación, en ningún momento se habló de división. Las propuestas de notación que dieron los equipos son, en síntesis, las siguientes:

- Pocos dan cuenta de la operación de división: "$1/5 \div 3 = 1/15$".
- Algunos dan cuenta tanto de la operación de división como del proceso para calcular el cociente "1/5 repartido entre 3 niños $= 3 \times 5 = 15$... 1/15".
- Algunos confunden la operación en juego con la que usaron en el proceso de cálculo. Escriben por ejemplo: "$1/5 \times 3 = 1/15$".
- La mayoría da cuenta únicamente del proceso de cálculo: "$3 \times 5 = 15$".

Hacer explícita la operación que ha estado en juego en las tareas realizadas (la división de una fracción), distinguiendo dicha operación de la que se utiliza como parte de la técnica para encontrar el resultado (multiplicar el denominador), y poder expresar lo anterior en el lenguaje de la aritmética, constituyó retos adicionales a los que habían logrado, hasta este momento, los alumnos. La siguiente discusión ocurrió cuando la propuesta de cada equipo fue escrita en el pizarrón y la maestra invitó al grupo a escoger la que les pareciera mejor. Las intervenciones ilustran el esfuerzo de varios alumnos por dilucidar la confusión entre multiplicación y división, así como la riqueza de sus argumentos.

Alumno del equipo 5: [*refiriéndose al hecho de que ellos expresaron una multiplicación, no una división*] Nada más cambia el signo de multiplicación, pero es lo mismo.

Metzeri: [*No*] la multiplicación aumenta y un quinto por tres no es un quinceavo, entonces la 4 [respuesta del equipo 4] es la que está bien ("1/5 ÷ 3 = 1/15"). Ése es el equipo que dice más claro y el 2 está mal, un quinto por tres no es un quinceavo, no puede ser porque es menos y no más. O sea, el [equipo] 2 dice que es tres veces 1/5.

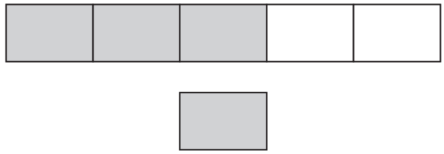
Marianela: es lo que iba a decir... es totalmente lo contrario en las operaciones [...] en la división disminuye y en la otra [multiplicación] aumenta.

Arturo: es que... en la división se busca un número que multiplicado...

Maestra: entonces... ¿yo puedo usar la multiplicación y la división indistintamente porque es lo mismo?

Arturo: es que si vas a dividir tienes que hacer a fuerza la multiplicación.

Marianela: es que si son 3 veces 1/5 son...1, 2, 3 veces 1/5 es... [*dibuja en el pizarrón un pedazo que representa 1/5 y los repite 5 veces*]:



Marianela: y 1/5... [*señala el quinto de abajo*] entre 3, es 1/15 de toda la tira.

Alumno de equipo 9: [*Pasa al pizarrón espontáneamente y corrige su propuesta de representación (1/5 × 3 = 1/15) quedando así: 1/5 × 3 = 3/5*].

Varios: ¡Ahh... sí... sí!

Metzeri y Marianela consideraron que no podía tratarse de una multiplicación, pues la multiplicación aumenta, la división disminuye. En el caso que discuten (1/5 ÷ 3), la propiedad es válida puesto que el divisor es un número natural. Marianela no convenció a sus compañeros con su primer argumento y más tarde planteó otro más convincente: si se tratara de multiplicación el resultado sería tres veces 1/5 y no 1/15. Es hasta este momento que el equipo 9 retomó la idea y modificó su propuesta. Enseguida otros alumnos aceptaron el argumento de Marianela.

Arturo expresó un conocimiento correcto sobre la división cuando dice: "en la división se busca un número que multiplicado" y luego "es que si vas a dividir tienes que hacer a fuerza la multiplicación". Sin embargo, no es el vínculo entre división y multiplicación el que estaba en juego, se trataba de otro vínculo: para dividir una fracción entre un natural, basta con multiplicar su denominador por ese natural. Como ocurre a veces, en este caso la difusión de un conocimiento correcto en el grupo dificultó distinguir la operación en juego. No obstante, puede decirse que la discusión favoreció la extroversión de puntos de vista de los alumnos sobre las operaciones de multiplicar y dividir y los ayudó a identificar la operación en juego.

Procedimientos de los alumnos para la división de fracciones no unitarias (parte III de la secuencia)

¿Qué pasaría si en lugar de dividir 1/5 entre 3, dividimos 2/5? Como se vio en el análisis previo, este problema es considerablemente más complejo. Recordemos que el propósito específico de esta parte fue analizar la factibilidad de que los alumnos utilizaran el procedimiento para dividir una fracción unitaria como estrategia de base para construir otra que permitiera dividir fracciones no unitarias.

La situación inicial consistió en replantear la división 1/5 de tira entre 3 y, una vez resuelta, formular la pregunta: "¿Qué pasaría si en lugar de dividir 1/5 de tira entre 3, dividimos 2/5 de tira entre 3?" Los alumnos disponían de papel, lápiz y de las tiras de cartoncillo. Posteriormente, se plantearon otras divisiones, pero solamente a tres alumnos.

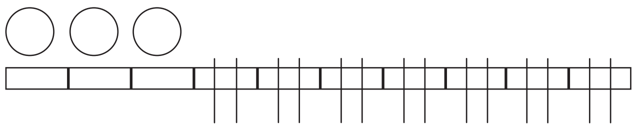
La división 2/5 *entre* 3

De los 33 alumnos del grupo, 13 lograron resolver la división. Algunos más (alrededor de 10) lograron esbozar un procedimiento correcto, pero no pudieron obtener el resultado. Los demás (otros 10) no lograron una aproximación adecuada al problema, por lo que el aumento en el grado de dificultad parece haber sido excesivo para ellos.

Los procedimientos incorrectos

Varios alumnos tendieron a aplicar el algoritmo recién establecido para la división de fracciones unitarias (multiplicar el denominador por el divisor), haciendo alguna modificación arbitraria, por ejemplo, 2/5 de tira entre 3 = 6/15 (multiplicando numerador y denominador de 2/5 por 3). Otros intentaron resolver con apoyo en una representación gráfica, pero perdieron de vista los datos de la operación que intentaban resolver, o la unidad de referencia, o bien, interpretaron el cambio en el numerador de la fracción (de uno a dos) de manera incorrecta. Un ejemplo es el siguiente:

René del equipo 7: 2/5... ¿entre tres? [*dibuja*]



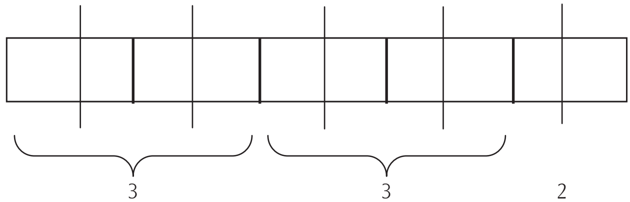
Sería... 1/3 con 7/21... hice una tira con 10 porque son 2/5. Tomé 3, uno para cada uno, los otros los partí en tres y los repartí.

René dividió un segmento en quintos y enseguida cada quinto en dos, con lo que obtuvo 10 pedacitos que reparte entre 3. Da uno a cada uno (los llama tercios, quizá porque es uno de tres), luego divide cada uno de los siete décimos restantes en tres, obtiene 21 por lo que los llama "veintiunavos".

Procedimientos correctos, pero que no permitieron obtener el resultado

Varios alumnos intentaron sin éxito encontrar el resultado con el apoyo de una representación gráfica. Por ejemplo, dos alumnos consideraron que era necesario tener dos enteros para tomar un quinto de cada uno. Con ello se vieron frente a 10 quintos, lo que los llevó a confusiones diversas. Otros representaron correctamente dos quintos y los dividieron entre tres, pero no lograron determinar la fracción resultante, por ejemplo:

Gaby: [*Dibuja*]



[*exclama*] ¡1/8!

Gaby dividió gráficamente 2/5 entre tres. Para saber qué fracción de la unidad representaba la porción resultante, intentó dividir el resto de la unidad de la misma manera, como lo había hecho en el caso de la división de fracciones unitarias. Naturalmente, sólo pudo dividir dos quintos más. Optó por dividir el último quinto entre 2, con lo que la unidad quedó partida en ocho partes. Como se vio en el análisis previo, en el caso de la fracción no unitaria la representación gráfica puede no ayudar.

Otros alumnos siguieron procedimientos numéricos guiados por una buena intuición, pero no lograron realizarlos correctamente. Seis intuyen que el paso de 1/3:5 (cuyo cociente se llegó a expresar como 1/3 de 1/5) a 2/3:5 supone una duplicación de algún tipo y proponen como cociente 2/3 de 2/5.

Mucho más cerca de lograr un procedimiento adecuado está Eréndira, quien sabe que el cociente se duplica:

Eréndira: 1/30 porque... si 1/5 entre 3 es igual a 1/15, entonces 1/15 más 1/15 es igual a 1/30 [*duda y propone otra respuesta*]... en lugar de multiplicar se divide [*escribe: 1/7.5*]

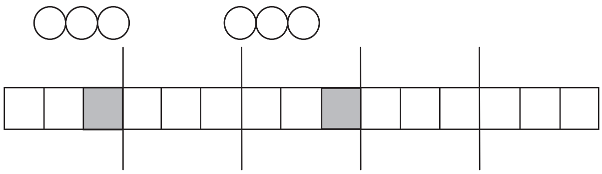
¿Intuyó que el cociente de 2/5 entre 3 tenía que ser del doble del 1/15 y que al proponer 1/30 estaba haciendo lo contrario?

Procedimientos correctos

Entre los 13 alumnos que lograron encontrar el cociente de 2/5 entre 3, identificamos dos tipos de procedimiento: el que consiste en tomar como punto de partida la división de una fracción unitaria 1/5:3 = 1/15 y luego duplicar ese cociente, y un procedimiento no previsto que consistió en convertir los dos quintos en seis quinceavos y "repartirlos" entre 3. Veamos un ejemplo de cada tipo.

Tipo 1: Duplicación o suma

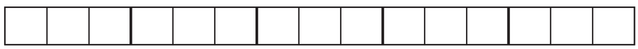
Marianela: Si 1/5 ÷ 3 es 1/15... la mitad sería... 7.5. Para 1/5, a un niño igual a 1/15... pero como son dos, ¡2/15! [*le explica a Jorge Luis*]. Si 1/5 entre 3 es igual a 1/15... [*dibuja*]:



La primera respuesta de Marianela (la mitad sería 7.5) es difícil de interpretar, ¿se confundió momentáneamente o sabe que al dividir a la mitad un denominador la fracción se duplica?

Tipo 2: Obtención de quinceavos y reparto

Metzeri: ¡2/15! [*contesta rápido*] [*dibuja una tira que divide en 5 partes y cada parte en tres*]



Como salen 6 partes... 6 entre 3 a 2, que son quinceavos.

Cabe observar que este procedimiento se facilita porque los alumnos han observado varias veces, en las divisiones anteriores, que cada subunidad se divide entre 3, o entre el divisor. Esto no significa que ellos prevean que al hacer esto se obtiene un numerador que es múltiplo del divisor, por lo que, con nuevos números, quizá no podrían repetir por sí mismos el procedimiento.

Otras divisiones

A tres de los alumnos que lograron un mejor desempeño en la división anterior, se les plantearon tres divisiones más: 3/5 entre 3, 4/5 entre 3 y 4/5 entre 5.

En las dos primeras divisiones cambia únicamente el numerador de la fracción (con respecto a la división de fracción unitaria 1/5 entre 3 que se planteó al principio). Los alumnos no tuvieron dificultad. Dos de ellos partieron del resultado 1/5 entre 3 y se limitaron a triplicarlo y cuatriplicarlo (primer tipo de procedimiento). Otro dividió cada quinto en tres, como lo había hecho en los ejercicios anteriores, y esto le permitió obtener un número de quinceavos múltiplo de 3 (segundo tipo de procedimiento). Ninguno observó que, para 3/5 entre 3, hay un camino corto y simple: dividir solamente el numerador. Estaban centrados en la técnica que habían venido utilizando.

En la división 4/5 entre 5, los tres alumnos recurrieron nuevamente a representaciones gráficas sin lograr reconstruir ninguno de los dos tipos de procedimiento que habían venido utilizando, lo cual pone de manifiesto la fragilidad de los procedimientos recién establecidos para dividir fracciones no unitarias hasta este momento.

COMENTARIOS FINALES

INTERÉS DE ESTUDIAR LA DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN ENTRE UN NÚMERO NATURAL EN LA ESCUELA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN

Debido a las dificultades en el diseño de una de las situaciones didácticas y al hecho de que no fue posible identificar los avances individuales de todos los alumnos que participaron en la experiencia, no podemos ser suficientemente concluyentes respecto a nuestra hipótesis de partida, a saber, que el estudio de la operación de división de una medida fraccionaria entre un número natural puede favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción. Sin embargo, los resultados sugieren fuertemente que la hipótesis podría verificarse. A continuación precisaremos esta consideración.

En el caso de las divisiones de fracciones unitarias, una parte importante del grupo pudo establecer que el cociente de $1/a$ entre n es $1/na$ y argumentarlo. Este logro supuso:

- Recuperar la unidad de referencia original para identificar la fracción resultante. Por ejemplo, para la división 1/4 de U entre 6, dar como cociente 1/24 de unidad en vez de 1/4 de 1/6 de unidad.
- Hacer explícito que al multiplicar el denominador la fracción disminuye de tamaño.

- Identificar que, aunque el resultado se obtiene multiplicando el denominador, la operación en juego es una división.

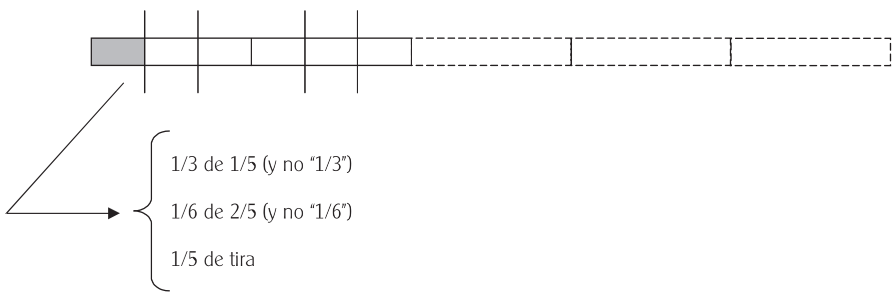
La división de fracciones no unitarias (de longitud) entre un entero resultó más difícil: sólo 13 de 33 alumnos lograron resolver el primer problema, y aproximadamente 10 más pudieron abordarlo mediante un procedimiento correcto, aunque no pudieran llevarlo a buen término. El procedimiento exitoso más utilizado fue, como se previó, el que descompone el problema de la división de fracciones no unitarias en divisiones de fracciones unitarias,

$$a/b{:}n = a \text{ veces } (1/b{:}n).$$

Se identificó además un esbozo de otro procedimiento que consiste en sustituir la fracción que se divide por otra equivalente cuyo numerador sea múltiplo del divisor y luego "repartir", por ejemplo,

$$2/5{:}3 = 6/15{:}3 = 2/15$$

Una gran parte de las dificultades que los alumnos tuvieron al intentar resolver las divisiones de fracciones no unitarias se originaron en el hecho de que tendieron a perder de vista la unidad de referencia de las fracciones. La doble partición, en el caso de fracciones no unitarias, da lugar a una diversidad de subunidades que dificultó considerablemente la identificación de la unidad. Por ejemplo, en el caso de la división 2/5 entre 3, cuando se procede partiendo cada quinto por separado, se tiene que cada uno de los dos "pedacitos" resultantes puede ser:



Se observó, además, que los riesgos de error aumentaron considerablemente cuando, en sus representaciones gráficas, los alumnos omitieron la parte de entero que no es objeto de reparto (la que aparece en el esquema anterior con líneas punteadas). La superación de estos errores pasa por explicitar la unidad de referencia y por comprender que, al variar la unidad, varía la medida. Estos aspectos forman parte esencial de una buena comprensión de las nociones de fracción y de medida.

Así, hay elementos que justifican la continuación de la indagación. Algunos de los puntos que convendría considerar en un segundo estudio son los siguientes: abarcar una gama más amplia de variantes, en particular, anteponer o intercalar el caso de las superficies rectangulares; intercalar casos en los que el numerador es múltiplo del divisor; rediseñar la situación para la división de medidas fraccionarias unitarias, y prolongar un poco más tiempo el trabajo.

La sustitución de una situación por otra con menos atributos didácticos

Una de las diferencias entre la situación originalmente planeada, "Escribe un mensaje para que tus compañeros manden un pedazo del mismo tamaño que el tuyo..." y la situación que finalmente se planteó "¿Qué fracción de tira resulta si dividimos un cuarto de tira entre seis?", radica en que en la segunda se pregunta directamente por un cociente, mientras que en la primera la meta es obtener dos porciones iguales de tira, meta para la cual el cociente debía ser "el recurso", es decir, debía aparecer como respuesta a una necesidad. Además, la situación original ofrecía el recurso de la validación empírica: se comparan las tiras. Sin embargo,

- No se logró diseñar una situación ágil y eficaz que tuviera los atributos anteriores.
- En quinto grado, los alumnos ya disponen de formas de verificar un cociente de una división con divisor entero que no son empíricas: la iteración del cociente en la recta numérica o la suma repetida del cociente, o incluso su multiplicación por el divisor.
- Como pudo comprobarse, plantear directamente la pregunta: "¿Qué fracción resulta de dividir tal fracción entre tal número?", permitió plantear, en quinto grado, un problema adecuado sin necesidad de que la operación en juego apareciera como herramienta de otra tarea.

Lo anterior sugiere que debemos discernir mejor de lo que lo hicimos en esta experiencia en cuáles casos el estudio de un conocimiento requiere una situación que apele a dicho conocimiento como "herramienta" para resolver determinada tarea, en cuáles casos es necesario que la situación permita validar de manera empírica, y en cuáles en cambio una simple pregunta (que no es sencilla de contestar) planteada directamente en el nivel del modelo, es decir, sin apelar a contexto extramatemático, tiene buenas posibilidades de convertirse en una situación de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Patricia Martínez, Margarita Ramírez y Diana Solares sus comentarios a las versiones preliminares del presente artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, Michèle (1995), "Ingeniería didáctica", en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, cap. 4, pp. 33-60.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1990), "On the Operator Construct of Rational Numbers: Towards a Semantic Analysis", Ponencia presentada en la reunion anual de la American Educational Research Association, Boston.

Block, D. y D. Solares (2001), "Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo", *Educación Matemática,* vol. 13, núm. 2, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1988), "Représentations et didactique du sens de la division", en G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (Actas del Coloquio de Sevres realizado en el CIEP, mayo de 1987), Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 47-64.

—— (1998), *Théorie des situations didactiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1998), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje,* México, SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Dávila, M. (1992), "El reparto y las fracciones", *Educación Matemática,* vol. 4, núm. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

González, N. (2003), *La división de números fraccionarios entre números naturales; una experiencia didáctica,* tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.

Kieren, T. (1988), "Personal Knowledge of Rational Number: Its Intuitive and Formal Development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Research Agenda for Mathematics Education.

Mancera, E. (1992). "Significados y significantes relativos a las fracciones", *Educación Matemática,* vol. 4 núm. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez Falcón, P. (1997), *Desarrollo de procedimientos para dividir: un estudio didáctico,* tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-INP.

Martínez Falcón, P. y E. Moreno (1996), "Aprendiendo a dividir", *Revista Básica. Las matemáticas en la escuela,* núm. 11, México, Fundación SNTE, pp. 34-44.

Ohlsson, S. (1988), "Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* vol. 2, Lawrence Elrbaum Associates.

Piaget, J. *et al.* (1960), "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones", en *The Child's Conception of Geometry,* Londres, Routledge and Keagan Paul. [Trad. de Irma Velázquez. Dirección General de Educación Especial, 1990.]

Ramírez, L. (2003), *La enseñanza de los primeros números en preescolar. Exploración de una alternativa didáctica,* tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.

Schwartz, J. (1988), "Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* vol. 2, Lawrence Elrbaum Associates.

Secretaría de Educación Pública (1994), *Fichero; Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto Grado,* México, SEP.

Solares, D. (1999), *Desarrollo de procedimientos para dividir: un estudio didáctico,* tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.

DATOS DE LOS AUTORES

Néstor Raymundo González Tovar
Dirección de Educación Especial, Secretaría de Educación Pública, México
ness_world@yahoo.com.mx

David Block Sevilla
Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav, IPN, México
dblock@cinvestav.mx

El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva

Santiago Hidalgo Alonso, Ana Maroto Sáez y Andrés Palacios Picos

Resumen: El rendimiento escolar en matemáticas, por lo negativo, viene siendo uno de los temas más estudiados en Educación Matemática. Aunque ha sido más tradicional analizar las relaciones entre rendimiento y aspectos cognitivos (conocimientos y capacidades), en los últimos años se está empezando a considerar la influencia que tienen las emociones en los éxitos o fracasos académicos en matemáticas.

En este contexto, utilizando cuestionarios abiertos en torno a seis ejes fundamentales (atribuciones de causalidad, gusto por las matemáticas, autoconcepto matemático, actitudes y creencias matemáticas, creencias sobre el profesor y creencias del entorno familiar), hemos realizado un estudio longitudinal de algunos de esos componentes emocionales desde la educación primaria (6 años) hasta el comienzo de la educación superior (18 años) del sistema educativo español. Mediante técnicas multivariantes de regresión logística y escalamiento multidimensional, establecimos la existencia de dos perfiles emocionales, uno matemático y otro antimatemático, significativamente relacionados con el rechazo o la aceptación de las matemáticas, con ciertas aptitudes mentales primarias, así como con el rendimiento escolar medido con pruebas de conocimiento.

Palabras clave: alfabetización emocional, perfil emocional, análisis longitudinal, regresión logística, rendimiento escolar.

Abstract: The mathematics performance at school, on the negative side, is becoming one of the topics most studied in Mathematical Education. Though it has been more traditional to analyze the relations between the performance and the cognitive aspects (knowledge and skills), in the last years the influence that the emotions have in the academic successes or failures in mathematics is beginning to be also considered.

In this context, using questionnaires opened around six fundamental axes (at-

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2004.

tributions of causality, taste for mathematics, mathematical autoconcept, attitudes and mathematical beliefs, beliefs on the teacher and beliefs of the familiar environment), we have realized a longitudinal study of some of these emotional components from primary education (6 years old) until the beginning of high education (18 years old) of the Spanish educational system. By means of technical multivariate of logistic regression and multidimensional scale, we state the existence of two emotional profiles, on mathematical and the other antimathematical, significantly related to the rejection or acceptance of mathematics, to certain mental primary aptitudes, as well as with school yield measured up to proof of knowledge.

Keywords: emotional literacy, emotional profile, longitudinal analysis, logistic regression, academic performance.

INTRODUCCIÓN

Los últimos informes elaborados por la Asociación Internacional de Evaluación del Rendimiento Escolar (IEA) son coincidentes en el bajo rendimiento en matemáticas de los escolares de educación primaria y secundaria comparativamente con otras áreas del currículum.

La respuesta social suele ser victimista, admitiendo que las matemáticas son "difíciles" y que esos malos resultados entran dentro de lo razonable.

Aunque no vamos a analizar con detenimiento la dificultad intrínseca de las matemáticas, no se pueden obviar ninguna de sus características propias: abstracción, inducción, jerarquización, globalización, rigor. Abstraer es partir de algo concreto para prescindir de ello progresivamente hasta formar conceptos definidos por algunas de sus propiedades. En el desarrollo lógico-deductivo se requiere una exigencia sistemática en términos de rigor, reflexión, jerarquización, deducción inductiva y globalización acumulativa (todo se relaciona, no hay partes independientes). Existiría una última exigencia especialmente problemática, porque en ella confluyen los aspectos anteriores: el paso de las teorías matemáticas mediante un proceso de concreción a la aplicabilidad y a la generalización de lo aprendido.

Las matemáticas, pues, son una disciplina que requiere para su asimilación cierto esfuerzo y el uso de estrategias cognitivas de orden superior. A ello, se suma el hecho de que los aprendizajes matemáticos son acumulativos, como lo son también las dificultades. Las lagunas de primaria se heredan en secundaria y se hacen insuperables a partir de la enseñanza superior.

Pero estas dificultades "objetivas" no podrían por sí solas explicar el rechazo a las matemáticas por una razón obvia: es la misma asignatura, la misma disciplina para todos los alumnos y, de entre éstos, hay quienes huyen de las matemáticas, pero también quienes las adoran.

Necesitamos otros factores explicativos; algunos relacionados quizá con el sistema educativo (programaciones y metodologías inadecuadas), con la propia sociedad (campañas publicitarias centradas en situaciones frustrantes del estudiante respecto a las matemáticas) o con la vivencia emocional de esta materia.

Hablar de "vivencia" es referirse a un conjunto complejo de elementos emocionales: atribuciones de causalidad, autoconcepto matemático, actitudes y creencias matemáticas, creencias sobre el profesor y el entorno familiar, etc. (Mcleod, 1989, 1992; Gómez Chacón, 1997, 2000; Hidalgo, Maroto y Palacios, 2000a, 2000b, 2004). La percepción de dificultad, el rechazo o el aprecio a las matemáticas serían algunos ejemplos de actitudes entendidas como predisposiciones evaluativas que condicionan al sujeto a percibir y a reaccionar de un modo determinado.

Cabría diferenciar las actitudes hacia las matemáticas de las actitudes matemáticas. Las primeras se refieren a la valoración de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más componente afectivo que el cognitivo (NCTM, 1991; Callejo, 1994; Gómez Chacón, 2000; Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004). Por otro lado, las actitudes matemáticas tendrían un carácter marcadamente cognitivo; se manifestaría por el modo de utilizar capacidades mentales importantes para el trabajo en matemáticas (flexibilidad de pensamiento, reflexivas, espíritu crítico...). Tanto la dificultad como el rechazo pertenecerían a las primeras citadas: actitudes hacia las matemáticas.

Mandler (1989) nos propone una excelente explicación de cómo surgen y cómo se modifican estas actitudes. El estudiante, en la tarea de aprender, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas –problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc.– que le generan cierta tensión. Ante ellos, reacciona emocionalmente de manera positiva o negativa. Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si el individuo se encuentra con situaciones similares repetidamente, produciéndose la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional (satisfacción, frustración, etc.) puede ser automatizada y se solidifica en actitudes. Estas actitudes influyen en las creencias y colaboran a su formación.

Los trabajos empíricos que dan soporte experimental a estos planteamientos han sido, sin embargo, escasos y restringidos a áreas muy concretas relacionadas con el papel de las actitudes sobre el rendimiento (Schoenfeld, 1985, 1992; McLeod, 1992; Valdez, 1998; Gómez Chacón, 1999, 2000; Hidalgo, Maroto y Palacios, 2000b, 2004). Los aspectos más importantes relativos a las consecuencias de los afectos sobre el rendimiento son: el impacto poderoso que tienen en cómo los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas, la influencia en la estructura del autoconcepto como aprendiz de matemáticas y el obstáculo que es, en algunos casos, para el aprendizaje eficaz.

En los trabajos sobre la asociación entre rendimiento matemático y actitud, se presupone una estimable correlación entre estas variables, pero está por demostrar que haya una relación de dependencia (MacLeod, 1992). Sin embargo, McKnight y otros (1987), en el *Second International Mathematics Study*, observan que los estudiantes japoneses presentan el mayor grado de antipatía ante las matemáticas, a pesar de su excelente rendimiento. En estos y otros trabajos (Jackson, 1968; Knaupp, 1973; Aiken y Jhonson, 1976; Neale, Gill y Tismer, 1970) se comprueba que las diferencias en actitud pueden ser predictores significativos de diferencias en rendimiento, pero la variación de rendimiento predecible por las actitudes es muy baja.

Los estudios sobre la incidencia de las actitudes y opiniones del profesor de matemáticas sobre los alumnos muestran igualmente resultados dispares (Aiken y Jonson, 1976; Auzmendi, 1992; Linares y Sánchez, 1989; Quiles, 1998). Sin embargo, Aiken y Jhonson (1976) nos ofrecen experiencias en las que observan una apreciable correlación entre estos dos complejos actitudinales: profesor y alumno. El informe Crockoft señala que esa relación es más apreciable entre los alumnos más inteligentes y capacitados.

Las investigaciones sobre la relación actitud-método apuntan una mayor incidencia del método sobre la conformación de las actitudes del profesor que sobre las del alumno. Taylor (1989) y Aiken (1970) no observan diferencias en cuanto a la mejora actitudinal del estudiante utilizando métodos tradicionales o más experimentales. Sin embargo, Turégano (1985) observa que una actitud negativa de 92% hacia las matemáticas en alumnos de magisterio se logra reducir a 46% después de usar metodologías específicas: charlas-coloquio sobre las matemáticas y su importancia, conocimiento por parte del alumno de la programación didáctica, combinación del método expositivo y activo, cambio y diversidad de materiales de trabajo, etc. En esta misma línea, Chamoso y otros (1997) establecen que el rendimiento del alumno cuando se utilizan métodos tradicionales (clases magistrales) es inferior al conseguido con métodos participativos. Además, observan mejores actitudes en los alumnos cuando se sigue una enseñanza más participativa.

Los estudios longitudinales sobre las actitudes hacia las matemáticas son escasos. Si nos centramos en los trabajos que tratan la evolución de la actitud hacia las matemáticas, es general la conclusión de que se van haciendo menos favorables al avanzar la edad (Fennema, 1978; Fennema y Sherman, 1977; ICECE, 2002). Esta tendencia no es exclusiva de las matemáticas y se ha observado en otras materias y en las actitudes hacia la escuela en general. Es más, como sugieren Bell, Costello y Küchemann (1988), puede ser sólo el reflejo de un enfoque más crítico de muchos aspectos de la vida.

Hidalgo, Maroto y Palacios (2000a) han estudiado el papel de las actitudes en el segundo ciclo de educación infantil (3-6 años), etapa de extrema dificultad en el tema que nos ocupa. Entre otros resultados, destacan que las actitudes matemáticas en ese nivel educativo no están consolidadas y que la creatividad en el trabajo del profesor es un elemento clave en el grado de aceptación o simpatía hacia la actividad en el aula.

Los trabajos llevados a cabo por Gairín (1987) y Fernández (1986) confirman que la reducción de las actitudes favorables se manifiesta particularmente durante la adolescencia, y que es a los 11 años cuando empiezan a consolidarse las actitudes que se han desarrollado durante la enseñanza primaria y que están fuertemente polarizadas.

Para Guzmán (1993), uno de los factores más influyente en la aparición de emociones negativas relacionadas con las matemáticas sería el método docente, sobre todo aquel que potencia la pasividad del alumno.

Con respecto al rechazo, Chacón (2000) lo relaciona con las creencias acerca del éxito o el fracaso; más concretamente, con las atribuciones de causalidad, siendo el gusto por las matemáticas un motivo interno controlable. Además, encuentra en alumnos con bajos rendimientos en matemáticas reacciones emocionales que expresan agresividad y tristeza. Por ello, se recalca la importancia de disponer de estrategias de enseñanza matemática en las que la dimensión afectiva sea más que un acompañante accidental centrado en hacer más motivadoras las matemáticas.

Hidalgo, Maroto y Palacios (2004), trabajando con una muestra de alumnos de primaria y secundaria, encuentran que el rechazo a las matemáticas depende del nivel educativo. Una parte importante de este rechazo puede ser explicado por variables actitudinales relativas a las atribuciones de causalidad, percepción de competencias o percepción de facilidad para las matemáticas. Se sugiere, además, la presencia de una relación no delimitada entre la percepción de facilidad para las matemáticas y el aburrimiento de los alumnos.

Sin embargo, ni en este ni en otros trabajos parecidos, se llegan a concretar adecuadamente los factores que, a lo largo de la escolarización, van cimentando lo que al final de la primaria es ya una realidad: la presencia de dos tipos de alumnos; aquellos a los que les gustan las matemáticas y aquellos que las rechazan.

Nuestra intención es evaluar el peso predictivo que sobre esta aceptación o rechazo tienen algunas variables afectivas, así como determinar si podemos hablar realmente de un doble perfil emocional que nos permita caracterizar de manera clara estos dos tipos de alumnos a los que nos venimos refiriendo. Conocer un poco más y mejor por qué algunos alumnos adoran las matemáticas y otros las rechazan visceralmente y cuáles consecuencias se derivan de todo ello.

En este proceso, es de gran importancia adoptar una perspectiva evolutiva. Como no podría ser de otra manera, gran parte de las actitudes escolares se desarrollan con el tiempo y se consolidan tardíamente. El paso de la educación primaria a la secundaria es de gran trascendencia en este sentido por los importantes cambios que se producen en la dimensión emocional de los alumnos y, por ello, en la configuración de lo que venimos denominando perfiles emocionales matemáticos.

MUESTRA E INSTRUMENTOS

MUESTRA

La selección de alumnos se realizó tomando los colegios como unidad de asignación sobre la base de la aleatoriedad tanto en el sexo como en el resto de variables socioeconómicas.

No obstante, se decidió realizar dos grandes estratos por el tipo de escuela (pública o privada) y por el lugar de su ubicación (rural o urbana). Las 60 escuelas que participaron en la toma de datos fueron seleccionadas de manera aleatoria (muestreo aleatorio simple). Pertenecían a 10 provincias (Comunidad de Castilla y León y Madrid, para el caso de estudiantes universitarios) del territorio español. Tomando como base para el cálculo los datos de la población total de alumnos escolarizados en dichas comunidades y los alumnos participantes, los errores muestrales no superaron en ningún caso el 5%; datos que asegurarían la representatividad estadística de la muestra en estas comunidades de características similares al resto del territorio español (cuadro 1).

La toma de datos se realizó a lo largo de tres cursos escolares (1999-2000,

Cuadro 1 Errores muestrales

Nivel educativo	Población*	Muestra	Error muestral**
3er ciclo primaria	22 747	604	2.87
5º ciclo primaria	21 653	881	2.29
1er ciclo secundaria	23 846	414	3.83
3er ciclo secundaria	21 938	420	3.33
Bachillerato	17 754	337	3.12
Universidad (sólo alumnos de primer curso de las dos comunidades)	42 327	532	4.98

* Datos ofrecidos por las Consejerías de Educación relativos al curso 2000-2001 y 2001-2002, dependiendo del nivel educativo

** Para el cálculo de los errores muestrales, hemos utilizado la fórmula: $Em^2 = z^2 * (N - n)/N * (p * q)/n$; z = nivel de confianza; N = tamaño de la población; n = tamaño de nuestra muestra; $p = (1 - q)$ = valores de las proporciones en la población.

2000-2001, 2001-2002), el primero dedicado fundamentalmente a la validación y depuración de los cuestionarios y pruebas.

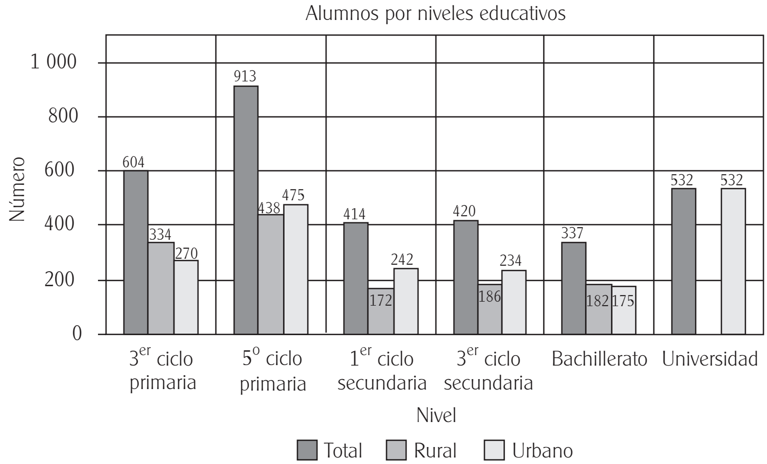
El número de alumnos participantes, como acabamos de señalar, fue de 3 187, pertenecientes a los ciclos primero, segundo y tercero de primaria, primero y segundo ciclo de secundaria, bachillerato y universidad, con edades comprendidas entre los 8 y los 19 años (figura 1). Los alumnos universitarios cursaban primer curso de titulaciones de las típicamente consideradas de *letras* y de *ciencias* de forma compensada.

Instrumentos de recopilación de datos

La mayoría de las escalas relativas a la dimensión afectiva se han centrado en la medida de las actitudes hacia las matemáticas y, más en particular, en la actitud hacia el contenido matemático (Corbalán, Gairín y López, 1984; Turégano, 1985; Gómez Chacón, 1998; Chamoso y otros, 1997; Morales, 2000).

En esta ocasión, hemos optado por cuestionarios abiertos de contenido más amplio que las escalas de actitudes al uso, con el propósito de obtener una mayor información de las variables determinantes del rechazo de las matemáticas,

Figura 1 Número de alumnos de la muestra por niveles educativos y zona geográfica



en concreto, y de la percepción de dificultad de los alumnos (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2000b, 2004).

Se han elaborado seis cuestionarios dirigidos a los estudiantes de educación primaria, secundaria, bachillerato y primer curso de universidad que fueron cumplimentados al comienzo del curso por alumnos del ciclo y nivel inmediatamente superior. Es decir, el cuestionario relativo al primer ciclo de primaria fue contestado por alumnos de 3º de primaria (8 años); el del segundo ciclo de primaria, por alumnos de 5º de primaria (10 años); el del tercer ciclo de primaria, por alumnos de 1º de secundaria (12 años); el del primer ciclo de secundaria, por alumnos de 3º de secundaria (14 años); el del segundo ciclo de secundaria, por alumnos de 1º de bachillerato (16 años); el del bachillerato, por alumnos de 1º de universidad (18 años).

Aunque diferentes en contenidos, mantienen una estructura idéntica con seis ejes fundamentales que han guiado la elaboración de los algo más de 35 ítems que, por término medio, componen los diferentes cuestionarios: atribuciones causales sobre el éxito o el fracaso, autoconcepto matemático, gusto o simpatía hacia las matemáticas, creencias respecto de las matemáticas, actitudes hacia las matemáticas referidas a la valoración y aprecio de esta disciplina y sus dificultades en el aprendizaje en comparación con las otras materias curriculares, creencias sobre la influencia del entorno familiar y sobre la personalidad y labor de los profesores de matemáticas.

Tras los pertinentes procesos de depuración, el cuestionario tipo quedó determinado por un conjunto de preguntas relativas a cada una de esos componentes. Respecto de las atribuciones de causalidad, quisimos conocer a qué imputan los estudiantes las dificultades que se les presentan con las matemáticas y las causas de sus buenas o malas calificaciones.

El gusto o simpatía que los alumnos tienen hacia las matemáticas lo pulsamos a través de una pregunta global y directa: "¿Te gustan las matemáticas?" y otras más selectivas sobre sus preferencias entre todas las materias de su currículum o sobre los condicionantes de las matemáticas en la elección de itinerarios educativos.

La información sobre el autoconcepto matemático de los estudiantes la centramos en conocer cómo se consideran para las matemáticas y cómo consideran las matemáticas.

Configuramos el componente relativo a las creencias matemáticas del alumno con preguntas de tipo: ¿Divertidas o aburridas?, ¿fáciles o difíciles?, ¿útiles o inútiles?, ¿para chicos o para chicas?...

Las creencias sobre la influencia del profesor de matemáticas las centramos en recabar la opinión de los estudiantes tanto en la posible incidencia en el gusto hacia las matemáticas como en sus resultados académicos. Asimismo, quisimos conocer los rasgos de personalidad con los que etiquetan a los profesores de matemáticas.

Finalmente, nos interesó recoger la percepción del estudiante sobre la participación de su entorno familiar en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y la consideración que le merecen (a su entorno familiar) las matemáticas (cuadro 2).

Para la medida de las aptitudes mentales primarias, nos hemos servido del test AMPE-F (Secadas, 1986). Completa este material un conjunto de pruebas de conocimientos matemáticos adecuadas a cada nivel educativo, elaboradas con los adecuados niveles de fiabilidad y validez estadística (Hidalgo, Maroto y Palacios, 1999). Todas ellas fueron depuradas a partir de modelos iniciales a lo largo del curso escolar 1999-2000 con alumnos de características similares a los que luego formaron parte de la muestra.

RESULTADOS

Dos de las variables más pertinentes para los objetivos que nos hemos propuesto son *la percepción de dificultad* y el *gusto o rechazo por las matemáticas*. El re-

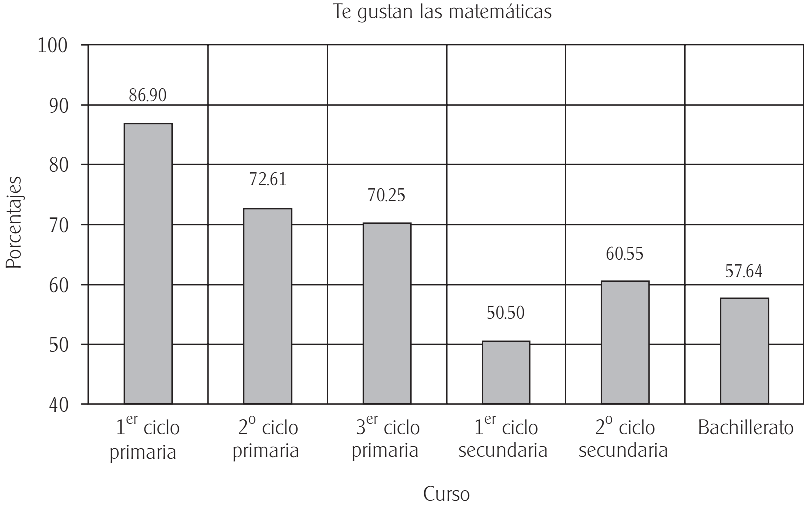
Cuadro 2 Estructura de los cuestionarios

Componente	Pregunta	Valores y etiquetas
Atribuciones de causalidad	1) Las dificultades que tienes con las matemáticas crees que se deben fundamentalmente a: (señala sólo la que consideres más importante)	1. Falta de estudio 2. Mis propias limitaciones 3. La dificultad propia de las matemáticas
	2) Cuando obtengo buenas calificaciones en matemáticas creo que se debe a:	1. La suerte 2. Mi dedicación y estudio 3. Mis propias capacidades en matemáticas
	3) Cuando obtengo malas calificaciones en matemáticas creo que se debe a:	1. La mala suerte 2. Mi poca dedicación y estudio 3. Mis bajas capacidades en matemáticas
Gusto por las matemáticas	5) ¿Te gustan las matemáticas?	1. Sí 2. No
	4) Si el próximo curso no tuvieras la asignatura de matemáticas	1. Te alegrarías 2. Te disgustaría 3. Te da igual
	6) Ordena según la dificultad las siguientes asignaturas	(Asignaturas según curso)
	6) La presencia de las matemáticas te ha hecho rechazar un determinado tipo de estudio (bachillerato, carrera universitaria...)	1. Sí 2. No
	9) Ordena según tus preferencias estas tareas matemáticas:	(Según curso)
	5) Mi antipatía a las matemáticas la tengo desde	(Según curso)
Autoconcepto matemático	10) ¿Cómo se te da calcular mentalmente?	1. Bien 2. Regular 3. Mal
	15) Considero las matemáticas:	1. Para inteligentes 2. Para gente normal
	18) Me considero para la asignatura de matemáticas:	1. Bueno 2. Normal 3. Regular 4. Malo
	19) Las matemáticas se me dan:	1. Bien 2. Regular 3. Mal 4. Muy mal
	20) ¿Te cuesta entender las matemáticas?	1. Sí 2. No
	21) Normalmente he tenido dificultades con las asignaturas de matemáticas:	1. Sí 2. No

Cuadro 2 Estructura de los cuestionarios (conclusión)

Componente	Pregunta	Valores y etiquetas
Actitudes y creencias matemáticas	11) Considero las matemáticas:	1. Divertidas 2. Aburridas
	12) Considero las matemáticas:	1. Fácil de aprender 2. Difícil de aprender
	13) Considero las matemáticas:	1. Útil para mi futuro escolar 2. Poco útil para mi futuro escolar
	14) Considero las matemáticas:	1. Para chicos 2. Para chicas
	8) Ordena según la dificultad las siguientes asignaturas:	(Asignaturas según curso)
Actitudes y creencias sobre el profesor	22) He tenido buenos maestros o profesores de matemáticas:	1. Siempre 2. Casi siempre 3. Nunca 4. Casi nunca
	25) ¿Crees que tus maestros o profesores de matemáticas han tenido que ver con tu opinión o gusto hacia las matemáticas?	1. Sí 2. No
	26) Los maestros o profesores de matemáticas son diferentes a los otros profesores:	1. Sí 2. No
	28) Mis malos resultados en matemáticas, si los tengo, se deben fundamentalmente a la mala explicación de mis profesores:	1. Sí 2. No 1. Sí 2. No
	29) Mi antipatía hacia las matemáticas se debe, en cierta medida, a los profesores de matemáticas:	1. Sí 2. No
	30) Los profesores de matemáticas se ocupan preferentemente de los alumnos más aventajados:	1. Sí 2. No
	31) Los métodos de los profesores de matemáticas suelen ser más aburridos que los de otras asignaturas:	1. Sí 2. No
	32) Los profesores de matemáticas se ocupan más de la teoría y poco de hacer práctica:	
	33) Los profesores de matemáticas suelen ser muy teóricos y no relacionan lo que explican con situaciones cotidianas:	1. Sí 2. No
	34) Cuando en alguna ocasión he tenido un buen profesor de matemáticas, he visto las matemáticas con otro sentido, con otra motivación:	1. Sí 2. No 1. Sí 2. No
Actitudes y creencias sobre la familia	23) Cuando tengo alguna dificultad con las matemáticas, suelo pedir ayuda a mis padres o hermanos:	1. Sí 2. No
	24) En mi familia, las matemáticas es una materia que consideran:	1. Muy importante 2. Poco importante 3. Nada importante

Figura 2 Gusto por las matemáticas (por niveles educativos)



chazo lo hemos determinado a partir de las respuestas a la pregunta directa realizada en las entrevistas y cuestionarios: "¿Te gustan las matemáticas?" Los resultados en los diferentes niveles educativos los resumimos en la figura 2.

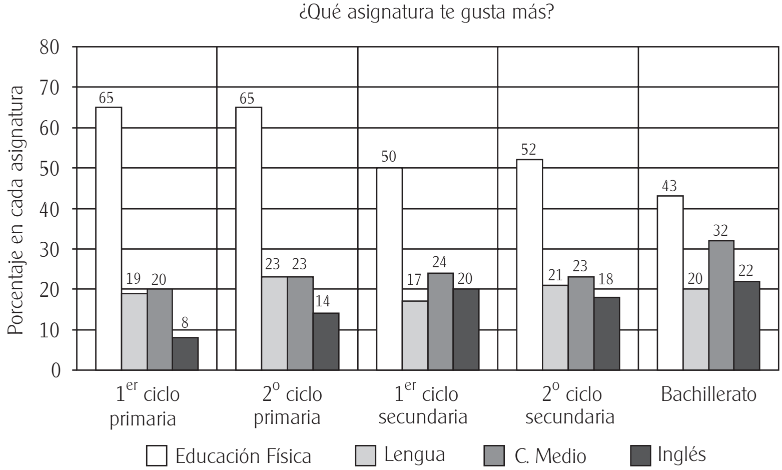
Las diferencias por niveles educativos son evidentes. En el primer ciclo de primaria (alumnos de 8 años) se hace difícil encontrar rechazos; por el contrario, el gusto es la situación más representativa. Esta situación no se modifica sustancialmente en el segundo ciclo de primaria (alumnos de 10 años), ni en el ciclo final de primaria (alumnos de 12 años), aunque apreciamos una tendencia descendente en el grado de aceptación.

Sin embargo, a partir de la educación secundaria (alumnos de 14 años), se produce un claro descenso en dicho gusto y un aumento en el número de alumnos a quienes no les gustan las matemáticas, descenso que se estabiliza en los niveles educativos posteriores.

Como comentamos en la parte introductoria, para algunos, esta tendencia a disminuir las actitudes positivas al aumentar la edad no sería exclusiva de las matemáticas, sino más bien un atributo asociado con el devenir de la progresiva escolarización. Sería sólo el reflejo de un enfoque más crítico de muchos aspectos de la vida.

Sin embargo, este descenso en la percepción positiva de las matemáticas no lo encontramos en otras asignaturas de nuestra muestra. Con pequeñas diferen-

Figura 3 Preferencias por asignaturas y niveles educativos



cias, la opinión que los alumnos tienen de las diferentes materias parece ser bastante constante a lo largo de la escolarización, dato que nos permite considerar que la disminución en el gusto por las matemáticas es más propio de la disciplina que de la edad o del paso a niveles educativos superiores (figura 3).

Pasando a la variable relativa a la percepción de dificultad, planteamos la pregunta: "¿Consideras las matemáticas fáciles de aprender?" Volvemos a encontrar datos que apoyan la importancia que tiene en dicho factor el nivel educativo de los alumnos (figura 4).

Es interesante destacar que, tanto en esta variable como en la anterior (gusto hacia las matemáticas), el punto de inflexión en el crecimiento significativo de la percepción de dificultad y de rechazo coincide en el paso de primaria a secundaria.

Este último dato, junto con otros que tendremos ocasión de analizar, podría sugerir, a partir de un primer análisis descriptivo, covariaciones en las variables referidas de facilidad y gusto (dificultad y rechazo) hacia las matemáticas (figura 5).

Esta tendencia a la covariación que observamos a lo largo de los diferentes niveles educativos podría permitirnos formular la hipótesis de que el rechazo determina la percepción de dificultad o, más probablemente, que la dificultad percibida determina el rechazo hacia las matemáticas.

Sin embargo, dentro de este primer intento explicativo (descriptivo) de la relación entre ambas variables, hay datos que parecen no encajar. Realicemos un

Figura 4 Percepción de dificultad

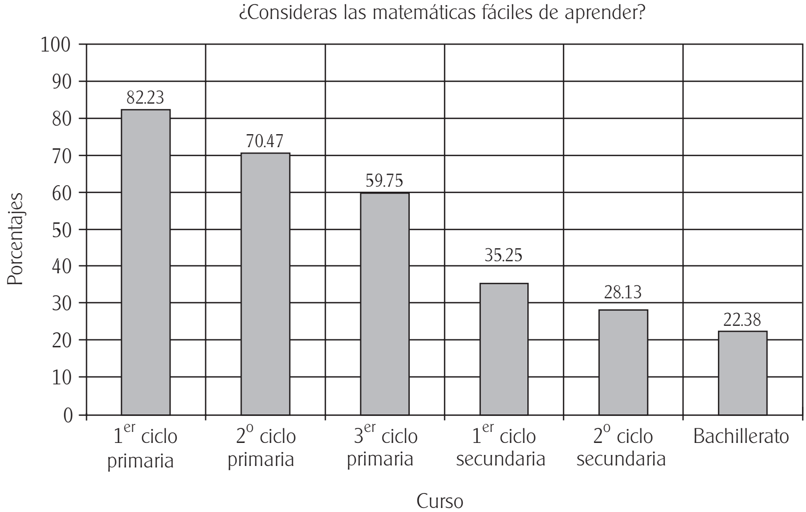
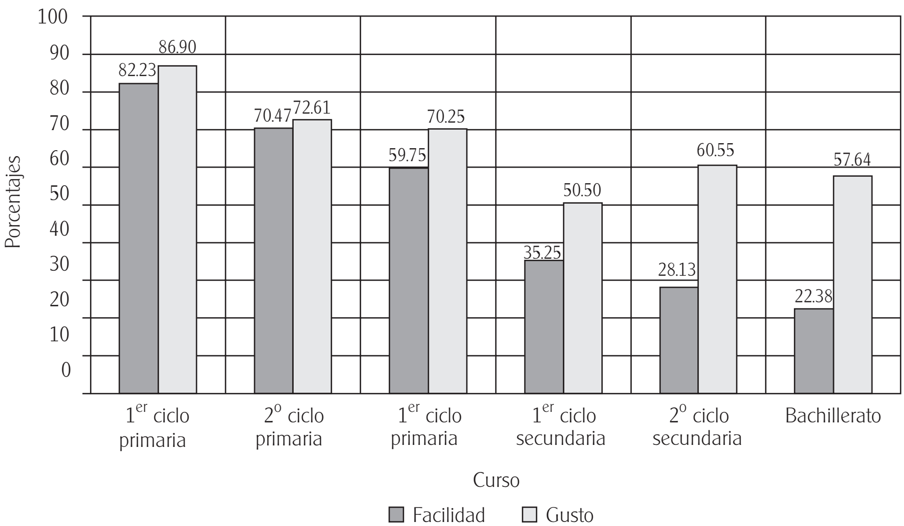


Figura 5 Facilidad y gusto hacia las matemáticas (por niveles educativos)



Cuadro 3 Gusto por las matemáticas y dificultad percibida
(por cursos y % sobre el gusto por las matemáticas)

Curso	Dificultad percibida	Gusto por las matemáticas: Sí	No	Chi-cuadrado	Sig.
1er ciclo primaria	Fácil	87.4	48.1	71.032	0.000
	Difícil	12.6	51.9		
2o ciclo primaria	Fácil	81.4	41.9	132.271	0.000
	Difícil	18.6	58.1		
3er ciclo primaria	Fácil	76.4	22.9	98.663	0.000
	Difícil	23.6	77.1		
1er ciclo secundaria	Fácil	57.4	14.3	79.183	0.000
	Difícil	42.6	85.7		
2o ciclo secundaria	Fácil	40.2	10.9	32.169	0.000
	Difícil	59.8	89.1		
Bachillerato	Fácil	34.4	7.9	48.010	0.000
	Difícil	65.6	92.1		

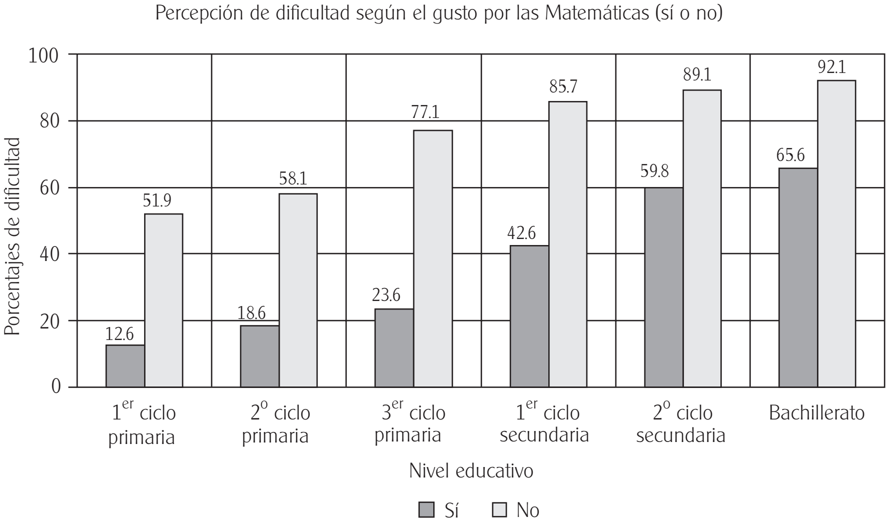
análisis detallado de la distribución marginal de ambas variables (dificultad y rechazo) en cada uno de los diferentes niveles educativos (cuadro 3).

En dicha distribución comprobamos que, ciertamente, en términos globales existe dependencia significativa estadísticamente entre gusto y dificultad en los diferentes niveles educativos. Pero cabría esperar que, dentro de los porcentajes de alumnos a quienes les gustan las matemáticas, se mantuvieran, más o menos constantes a lo largo de la escolarización, los porcentajes de la percepción de dificultad. De igual manera, si mantenemos como hipótesis la relación entre dificultad y rechazo, entre los alumnos a quienes no les gustan las matemáticas debería aumentar la percepción de dificultad en mayor medida que entre quienes les gustan; aspectos que no se producen (figura 6).

El nivel de dificultad percibido aumenta en la misma medida tanto entre los que rechazan las matemáticas como entre los que no. Y, por tanto, no podemos considerar como factor de cambio en las actitudes hacia las matemáticas la percepción de dificultad.

A este mismo resultado podríamos haber llegado por un camino menos descriptivo, mediante técnicas multivariantes como la regresión logística.

Figura 6 Percepción de dificultad según el gusto por las matemáticas (por niveles educativos)



A partir de esta técnica, podremos construir para cada uno de los diferentes niveles educativos la ecuación de regresión de la dificultad percibida (variable predictora) sobre el rechazo a las matemáticas (variable predicha) y establecer cuánto de esta última puede ser explicada por la primera, así como su grado de significación estadística. Todo ello en la idea de que cuanta más varianza sea explicada, mayor será la importancia de la dificultad en la explicación del rechazo (cuadro 4).

Mientras que en el primer ciclo de primaria (alumnos de 8 años de edad) podríamos pronosticar acertadamente el rechazo hacia las matemáticas a partir de la percepción de dificultad (al menos en 87% de los casos), este mismo pronóstico estaría muy cercano al que cabría obtener por puro azar en el segundo ciclo de secundaria o bachillerato. Comprobamos, además, cómo al avanzar el nivel educativo es acusado el descenso en el nivel de aciertos en los pronósticos y, por tanto, la variabilidad de rechazo explicada por la percepción de dificultad.

Puede que en un determinado nivel educativo, el correspondiente al tramo más temprano (primer ciclo de primaria: 8 años), la dificultad y el rechazo matemático covaríen de manera conjunta y, por tanto, puedan ser explicados una a partir del otro. Sin embargo, esta situación pronto deviene poco convincente y

Cuadro 4 Ecuaciones de regresión logísticas por niveles educativos (dificultad-rechazo)

	R^2 Cox y Snell	R^2 Nagelkerke	B (peso)	Wald	Sig.	Acierto en los pronósticos (%)
1er ciclo primaria	0.092	0.169	2.017	58.208	0.000	86.9
2º ciclo primaria	0.132	0'191	1.804	119.327	0.000	75.1
3er ciclo primaria	0.225	0.319	2.388	83.631	0.000	76.6
1er ciclo secundaria	0.192	0.256	2.091	69.823	0.000	71.6
2º ciclo secundaria	0.105	0.142	0.320	28.287	0.000	59.9
Bachillerato	0.102	0.136	0.282	40.823	0.000	59.4

R^2 Cox y Snell y R^2 Nagelkerke = índices de significación del modelo; B = peso en la ecuación; Wald = estadístico de significación de los pesos; Sig. = significación estadística de cada variable en la ecuación.

necesita en los niveles educativos superiores un mayor número de variables como explicación de alguna de ellas. Así sucede cuando incluimos nuevas variables en la ecuación predictiva a la ya mencionada percepción de dificultad, como pasamos a describir brevemente.

Podemos suponer que, muy relacionado con la dificultad de las matemáticas, se encuentra el grado de diversión o aburrimiento que provocan en el alumno. Se trataría, a grandes rasgos, del componente afectivo en el que cristalizaría la percepción de dificultad. Si lo uno es la parte cognitiva asociada al desempeño de una tarea (la dificultad), lo otro sería el componente emocional o vivencial de dicha percepción de dificultad (aburrimiento o diversión).

Es fácil, además, considerar que los efectos de la dificultad y del aburrimiento se dejen sentir en las opiniones del alumno sobre sí mismo, tanto en lo concerniente al conocimiento de sus limitaciones como a la carga emocional positiva o negativa asociada con dichas limitaciones. Aspectos que nos pondrían en relación con el autoconcepto y la autoestima matemática de los alumnos.

Cuando introducimos como nuevas variables explicativas del rechazo a las matemáticas la percepción de aburrimiento y el autoconcepto matemático (además de la ya analizada percepción de dificultad), los nuevos valores de las ecuaciones logísticas cambian de manera significativa (cuadro 5).

Cuadro 5 Ecuaciones de regresión logísticas por niveles educativos (dificultad-aburrimiento-autoconcepto-rechazo)

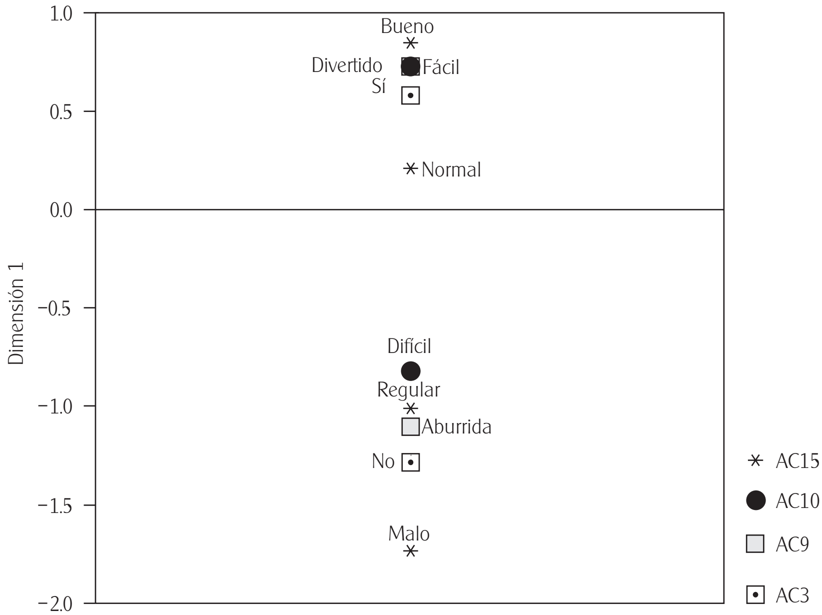
	R^2 Cox y Snell	R^2 Nagelkerke	B (peso)	Wald	Sig.	Acierto en los pronósticos (%)
1er ciclo primaria	0.339	0.627	0.606 0.767 4.709	2.106 (dificultad) 2.235 (autoconcepto) 121.215 (aburrimiento)	0.147 0.135 0.000	93.7
2º ciclo primaria	0.368	0.533	0.821 0.879 2.951	13.239 9.934 199.802	0.000 0.002 0.000	86.5
3er ciclo primaria	0.464	0.659	1.382 0.641 3.277	13.746 5.683 86.255	0.000 0.017 0.000	88.6
1er ciclo secundaria	0.479	0.639	0.997 1.052 3.037	8.333 23.113 75.547	0.004 0.000 0.000	83.9
2º ciclo secundaria	0.434	0.584	0.871 0.685 3.007	4.209 8.976 79.867	0.040 0.003 0.000	84.0
Bachillerato	0.495	0.663	0.609 1.142 4.090	2.221 26.262 82.705	0.136 0.000 0.000	82.9

R^2 Cox y Snell y R^2 Nagelkerke = índices de significación del modelo; B = peso en la ecuación; Wald = estadístico de significación de los pesos; Sig. = significación estadística de cada variable en la ecuación.

El peor de los pronósticos es, ahora, de cuantía parecida al mejor de los realizados con la variable dificultad como único criterio. En términos generales, en todos los niveles educativos, la varianza explicada en rechazo es muy alta, y los errores que cometemos con la ecuación predictiva, escasos. Estos errores, cuando los hay, son más probables cuanto mayor es el nivel educativo (se hace más compleja la explicación del rechazo cuanto más edad tienen los alumnos).

De las tres variables que hemos usado como predictoras de rechazo es precisamente la relacionada con la dificultad, la que menores pesos presenta. En los niveles superiores, concretamente al final de la secundaria y en bachillerato, el valor de dichos pesos no es significativo estadísticamente, lo cual remarcaría lo ya

Figura 7 Escalamiento multidimensional de las variables rechazo, dificultad, aburrimiento y autoconcepto



AC3 = gusto por las matemáticas   AC9 = diversión-aburrimiento
AC10 = percepción de dificultad   AC15 = autoconcepto matemático

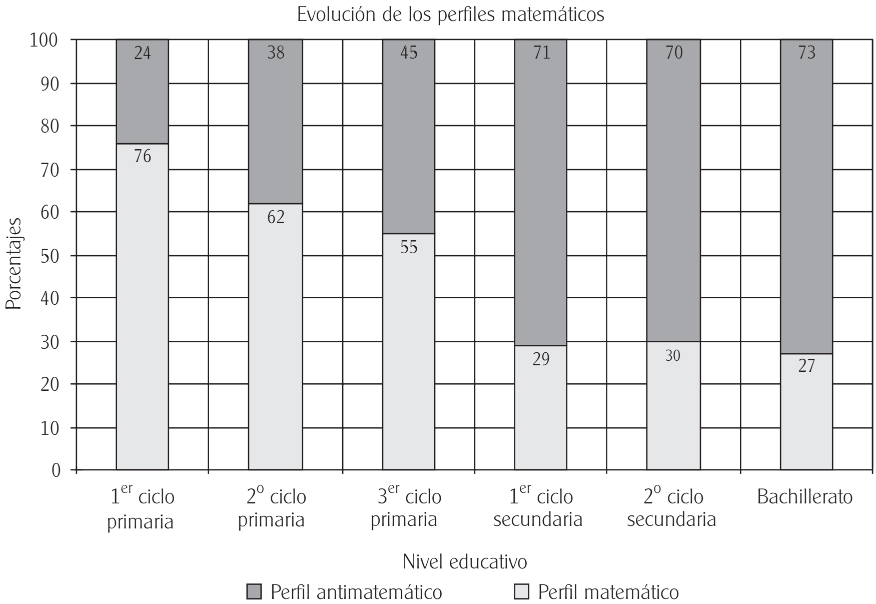
apuntado anteriormente: la explicación del rechazo a partir de la dificultad de las matemáticas decae progresiva y significativamente.

Situación muy diferente cuando consideramos la variable *autoconcepto matemático*. En este caso, la tendencia es contraria a la anterior por cuanto aumenta su importancia como predictora de rechazo a medida que lo hace la edad de los alumnos. En este sentido, pues, un bajo autoconcepto relacionado con el dominio matemático sería peor indicador de rechazo en primaria que en secundaria o bachillerato. Tal vez porque en estos niveles escolares tempranos todavía no se tiene totalmente asentado el autoconcepto matemático.

Un dato que se debe resaltar es la alta correlación que estas cuatro variables (rechazo, dificultad, aburrimiento y autoconcepto) poseen tomadas conjuntamente.

Podemos observar dicho solapamiento a partir de los resultados de un escalamiento multidimensional utilizando un espacio de única dimensión en dicha representación (figura 7).

Figura 8 Nivel educativo y perfiles emocionales matemáticos



Este espacio unidimensional representa las distancias entre las cuatro variables para el total de alumnos, independientemente del nivel educativo. Nos permite asegurar, por ejemplo, que los alumnos que rechazan las matemáticas son, a grandes rasgos, los mismos que la consideran difícil y aburrida y tienen bajos autoconceptos matemáticos. Por el contrario, aquellos alumnos a quienes les gustan las matemáticas la consideran una materia divertida y fácil y piensan que tienen capacidades suficientes como para afrontar con éxito las tareas asociadas con ella.

Esta técnica permite, además, realizar agrupaciones de alumnos en función de los resultados de esa única dimensión o factor; es decir, dividir a todos los alumnos en dos grandes grupos: alumnos con "perfil matemático" (aquellos para quienes las matemáticas son fáciles, divertidas y se les dan bien), alumnos con "perfil antimatemático" (aquellos que las rechazan por difíciles, aburridas y siempre se les han dado mal o regular).

Como cabría esperar por lo visto hasta ahora, el número de alumnos en cada perfil varía de manera significativa por nivel educativo (figura 8).

Al final del primer ciclo de primaria, de cada 10 alumnos, 8 entrarían dentro del perfil que hemos denominado matemático; al llegar al primer ciclo de secun-

Cuadro 6 Aptitudes y conocimientos en función del gusto o rechazo a las matemáticas

Tipo de alumno		Abstracción	Razonamiento	A. espaciales	A. numéricas	Conocimientos
Perfil matemático	Media	16.91	16.38	19.71	12.00	13.05
	Desv.	4.22	5.33	13.20	7.19	4.35
Perfil anti-matemático	Media	17.01	14.11	20.15	9.45	10.98
	Desv.	13.42	5.44	12.78	6.72	4.33
Total	Media	16.96	15.29	19.92	10.78	12.07
	Desv.	9.75	5.50	12.99	7.08	4.46
Significa ción esta-dística	F	0.027	40.279	0.252	30.219	49.289
	Sig.	0.870	0.000	0.616	0.000	0.000

daria, de éstos, quedarían sólo 2 o 3. Es decir, el paso de un nivel educativo a otro va acompañado de un descenso en el número de alumnos con gusto por las matemáticas y un aumento de los antimatemáticos, siendo el cambio de primaria a secundaria un momento especialmente significativo en este proceso. A partir de ese momento, los perfiles se estabilizan, se consolidan las actitudes, y los porcentajes de uno y otro se mantienen hasta la educación universitaria o hasta la finalización de la escolarización.

Esta distribución por perfiles ayuda a comprender, además, el rendimiento matemático, así como la influencia de ciertas aptitudes mentales primarias en dicho rendimiento de manera diferencial para cada uno de esos grupos. Saber, por ejemplo, si la relación que este doble perfil tiene sobre los conocimientos matemáticos es significativa o si la rapidez de cálculo mental es mayor en los unos que en los otros.

Los resultados en cada uno de estos dos grupos comentados (perfil matemático-perfil antimatemático) en una prueba de conocimientos nos permitirían concluir que existen diferencias significativas en el rendimiento final. Diferencias que volvemos a encontrar en ciertas aptitudes mentales primarias (cuadro 6).

Tanto en la prueba de conocimientos como en las aptitudes numéricas y razonamiento encontramos rendimientos mejores entre los alumnos que manifiestan gustarles las matemáticas; diferencias que en algunos casos, como en las aptitudes numéricas, llegan a ser importantes. Se trata, pues, de alumnos con mayores capacidades al menos en aspectos tan importantes para las matemáticas como son el razonamiento, el cálculo elemental o la visión espacial.

Destaquemos, por último, determinadas creencias y opiniones que manifiestan estos dos grupos de alumnos. Aquellos que hemos denominado de "perfil matemático" opinan de sus profesores y maestros en estos términos: no son especialmente diferentes a los demás, no se ocupan especialmente de los alumnos más aventajados o sus métodos no son más aburridos que los de otros profesores. Por supuesto, consideran falsa la afirmación de que "casi nunca han tenido buenos profesores".

En el polo contrario, se sitúan los alumnos de perfil antimatemático. Este grupo, más homogéneo en sus respuestas, dice: "casi nunca han tenido un buen profesor de matemáticas", se ocupan más de los que más saben, parte de la culpa de su antipatía estaría en estos profesores y, además, cuando en alguna ocasión han tenido un buen profesor de matemáticas, han visto la asignatura con otro sentido, con otra motivación. Estas posiciones críticas en relación con el papel del profesor en la formación del gusto por las matemáticas se hacen más radicales al avanzar el nivel educativo. Para los alumnos de primer y segundo ciclo de primaria, sólo 10% considera al maestro responsable en algún grado del rechazo, en el tercer ciclo esta proporción es de 17%, 35% en el primer ciclo de secundaria, 40% en su segundo ciclo y 60% en alumnos de bachillerato. Algunas de las quejas más frecuentes en estos niveles superiores son el aburrimiento, el exceso de teoría, la ausencia de relación entre lo que explican y las situaciones cotidianas y la dedicación casi exclusiva a los alumnos aventajados.

Las diferentes opiniones de los unos y los otros quedan igualmente patentes cuando les pedimos que asocien lo que consideran más cercano con la palabra "matemática". Aquellos alumnos que rechazan las matemáticas citan con frecuencia términos como: *agobio, trabajo, quebraderos de cabeza, operaciones que no sé hacer, monotonía, aburrimiento, nerviosismo, liosas, estudio, esfuerzo mental* y, por encima de todas, *dificultad y suspenso*. Por el contrario, entre los que manifiestan sentirse a gusto con la asignatura, tienden a asociar con las matemáticas palabras tales como: *ajedrez, cálculo mental, dedicación y esfuerzo, destreza, diversión, lógica y entendimiento, números y operaciones* y, más frecuentemente, *pensar, razonar y utilidad*.

CONCLUSIONES

El gusto o el rechazo por las matemáticas puede ser entendido como la valoración promedio de un conjunto de variables de naturaleza emocional, tales como el autoconcepto matemático, la percepción de dificultad o las emociones asociadas más frecuentemente con esta materia (diversión o aburrimiento, por ejemplo).

Todas ellas, de forma conjunta, actuarían como un factor de atracción o de rechazo de las matemáticas, surgirían en un momento dado de la escolarización y se manifestarían en cada alumno de manera diferente (en un sentido positivo o negativo). Podríamos hablar, pues, de la existencia de un perfil emocional matemático producto de la valoración positiva de cada una de estas variables que lo forman. En el extremo contrario, el perfil antimatemático estaría formado por alumnos que valoran de manera negativa estas variables emocionales. Tanto uno como otro se desarrollarían a partir de las experiencias de primaria y se consolidarían en la educación secundaria.

En nuestra opinión, es especialmente relevante el crecimiento que experimenta la proporción de alumnos con perfil antimatemático al avanzar el proceso escolar por las relaciones que guarda tanto con el rendimiento matemático, medido a partir de pruebas de conocimientos, como con ciertas aptitudes mentales primarias. Alumnos clasificados dentro del perfil matemático tenderían a rendir más y mejor en matemáticas y a demostrar mejores aptitudes para la materia; por el contrario, los alumnos de perfil antimatemático obtendrían peores resultados en conocimientos y destrezas.

Este triángulo actitudes-destrezas-conocimientos presenta un importante grado de consonancia en cuanto a la dirección y la valencia (positivo-negativo, aceptación-rechazo) pero apenas nos da información de las relaciones causa-efecto que se establecen entre ellas. Sabemos que el alumno con perfil antimatemático suele obtener peores rendimientos y presenta perfiles aptitudinales más bajos; pero desconocemos si esta merma aptitudinal es consecuencia de los bajos rendimientos y éstos de las actitudes de rechazo o si, por el contrario, actitudes negativas generarían mermas en el rendimiento, lo que, a su vez, provocaría un estancamiento en el desarrollo de aptitudes implicadas en esas tareas.

Pensamos que aquí, como en otros aspectos del ser humano, se impone una explicación de mutuas influencias, un proceso dialéctico de cambio, en el que las causas producen consecuencias que acaban por convertirse, a renglón seguido, en las causas de un nuevo proceso y así sucesivamente.

La dificultad de las matemáticas podría actuar como elemento generador de fracaso en los primeros niveles educativos. No podemos pasar por alto que estamos en presencia de una materia que tiene un nivel alto de exigencias de funciones cognitivas superiores para su asimilación y que, además, los aprendizajes matemáticos son acumulativos (lo asimilado en un curso es el punto de arranque de los aprendizajes del nuevo), como lo son también sus lagunas.

Pero al comenzar la educación secundaria (12 años) se consolidan unas actitudes y vivencias de gran importancia en el devenir de las relaciones alumno-matemáticas. Y estas vivencias serían las que generarían la pérdida del gusto por las matemáticas en un perfecto ejemplo de la relación entre lo cognitivo y lo afectivo.

De manera esquemática y, por tanto, con el consiguiente peligro de simplificar lo complejo, podemos realizar una secuencia del devenir de muchos de esos alumnos que, en sus comienzos, gustaban de las matemáticas, pero que años más tarde terminan por rechazarlas cuando no por odiarlas: la dificultad intrínseca y acumulativa de las matemáticas provocaría en el devenir escolar lagunas importantes que producirían en algunos alumnos rendimientos escolares insatisfactorios; estos bajos rendimientos determinarían una disminución del autoconcepto matemático y atribuciones de causalidad negativas (fatalistas) a la par que desgana y aburrimiento que no sólo no ayudaría, sino que empeoraría la comprensión de la asignatura que sería percibida, de año en año, como un tormento. Como un proceso por decantamiento, estos posos, estas vivencias aisladas acabarían por consolidarse, formando perfiles matemáticos emocionales estables.

No quisiéramos terminar sin hacer mención de la incidencia que pudieran tener estos resultados sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el propósito de poder abordar una deseable redefinición de objetivos educativos en matemáticas.

Nuestros resultados confirmarían, al menos en parte, la idea de mutua dependencia entre factores cognitivos y factores emocionales. Por ello, una adecuada formación del futuro docente debe contemplar tanto los unos como los otros. Se hace necesaria y hasta urgente la inclusión, en el currículum de los futuros docentes, de temas relacionados con la inteligencia emocional, tales como el autoconcepto del alumno aprendiz de matemáticas, los determinantes afectivos del rendimiento escolar, la influencia de la historia personal y de los miedos del alumno (tratamiento de la diversidad emocional) o los más generales relacionados con la influencia de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas.

En la otra dirección, en relación con el alumno, se podrían incorporar de manera sistemática en las programaciones escolares objetivos encaminados a una alfabetización emocional matemática, a fin de invertir la tendencia observada hacia el perfil antimatemático. En suma, una verdadera toma de conciencia de la emoción y los afectos como vehículo de conocimiento matemático.

En este artículo, nos hemos centrado en el autoconcepto matemático, en el aburrimiento y en la percepción de dificultad como variables determinantes de estos perfiles. Obviamente se podrían realizar estudios análogos, utilizando como variables complementarias otras como: el papel del profesor, sus métodos, el entorno familiar del alumno, las propias creencias y atribuciones del alumno... Dejamos abierta, pues, esta posibilidad para posteriores trabajos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aiken, L.R. (1970), "Attitudes toward Mathematics", *Review of Educational Research,* núm. 40, pp. 239-257.

Aiken, L.R. y L. Jhonson (1976), "Update on Attitudes and other Affective Variables in Learning Mathematics", *Review of Educational Research,* núm. 46, pp. 535-556.

Auzmendi, E. (1992), *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias: características y medición,* Mensajero, DL.

Bell, A.W., J. Costello y D. Küchmann (1988), "Attitudes", *Research on Learning and Teaching,* Oxford, Nfer-Nelson, pp. 239-257.

Callejo, M.L. (1994), *Un club matemático para la diversidad,* Madrid, Narcea.

Chamoso, J. y otros (1997), *Evolución de las actitudes ante la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria y secundaria obligatoria. Análisis de las causas que inducen dicha actitud,* MEC, Proyectos de investigación CIDE.

Corbalán, F., J.M. Gairín y J. López (1984), *Las matemáticas al finalizar la EGB,* Zaragoza, ICE.

Dienes, Z.P. (1970), *La construcción de las matemáticas,* Barcelona, Vicens-Vives.

Feneman, E. (1978), "Sex Related Differences in Mathematics Achievement and Related Factors: A Further Study", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 9, núm. 3, pp. 189-203.

Feneman, E. y J.A. Sherman (1977), "Sex-related Differences in Mathematics Achievement, Spatial, Visual and Affective Factors", *American Educational Research Journal,* núm. 12, pp. 52-71.

Fernández, M. (1986), *Evaluación y cambio educativo: el fracaso escolar,* Madrid, Morata.

Gairín, J. (1987), *Las actitudes en educación. Un estudio sobre las matemáticas*, Barcelona, PPU.

Gómez Chacón, I.M. (1997), "La alfabetización emocional en educación matemática", *Revista Uno*, núm. 13, pp. 13-15.

—— (1999), "Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas", *Premios Nacionales de Investigación e Innovación Educativa*, Colección Investigación, Madrid, Ministerio de Educación y Cultura-CIDE, pp. 333-358.

—— (2000), *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea.

Guzmán de M., (1993), *Tendencias innovadoras en educación matemática*, Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (ed.), Editorial Popular.

Hidalgo, S., A. Maroto y A. Palacios (1999), "Evolución de las destrezas básicas para el cálculo", *Revista de Educación*, Ministerio de Educación y Ciencia, núm. 320, pp. 271-294.

—— (2000a), "Mathematical Profile of Spanish School Children Moving on from Preschool to Prymary Education", 10th Conference on Quality Early Childhood Education, Londres, University of London.

—— (2000b), "Simpatía hacia las matemáticas, las aptitudes y el rendimiento de los alumnos: un complicado triángulo", *Actas del IV Simposio de Formación Inicial del Profesorado*, Oviedo, Universidad de Oviedo, pp. 213-217.

—— (2004), "¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas", *Revista de Educación*, Ministerio de Educación y Ciencia, núm. 334, pp. 75-99.

Instituto Canario de Evaluación y Calidad Educativa ICECE (2002), *Estudio longitudinal de la ESO: avance de resultados*, Gran Canaria, Instituto Canario de Evaluación y Calidad Educativa.

Jakson, P.W. (1968), *Life in Classrooms*, Nueva York, Hdt, Rinehart and Winston.

Knaupp, J. (1973), "Are Children's Attitudes Towards Learning Mathematics in Relation to Selected Student Characteristics?", *British Journal of Educational Psychology*.

Linares, S. y V. Sánchez (1989), "Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser profesor", *Revista de Educación*, Ministerio de Educación y Ciencia, núm. 290, pp. 389-406.

Mandler, G. (1989), “Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotion Interactions”, en McLeod y Adams (eds.), *Affect and Mathematical Problems Solving: A New Perspective,* Nueva York, Springer Verlag.

McKnight *et al.* (1987), *The Underachieving Curriculum: Assesing v.s. School Mathematic from an International Perspective,* Champaing (Illinois), Stipes.

McLeod, D.B. (1988), “Affective Issues in Mathematical Problem Solving: Some Theoretical Considerations”, *Journal for Research in Mathematics Education,* núm. 19, pp. 134-141.

—— (1989), *Beliefs, Attitudes, and Emotions: New View of Affect in Mathematics Education,* Springer Verlag.

—— (1992), “Research on Affect in Mathematic Education: A Reconceptualitation”, en Gows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

Morales, P. (2000), *Medición de actitudes en psicología y educación: construcción de escalas y problemas metodológicos,* Madrid, Universidad Pontificia, Comillas.

Neale, D.C., N. Gill y W. Tisman (1970), “Relationships between Attitudes toward School Subjects and School Achievement”, *Journal Education Research,* núm. 63, pp. 89-103.

NCTM (1991), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* publicado en castellano por la Sociedad Andaluza para la Educación Matemática, THALES.

Peralta, J. (1995), *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las matemáticas,* Madrid, Huerga y Fierro.

Quiles, M. (1998), “Relación de las actitudes de padres y profesores con la actitud matemática del niño”, *Revista de Psicología Universitas Tarraconensis,* vol. 10, núm. 2, pp. 97-104.

Secadas, F. (1986), *Test de inteligencia factorial AMPE-F,* Madrid, TEA.

Schoenfeld, A.H (1985), *Mathematical Problem Solving,* Orlando, Academic Press.

—— (1992), “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making in Mathematics”, en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Nueva York, MacMillan, pp. 334-370.

Taylor, L. (1989), “American Female and Male University Professor Mathematical Attitudes and Life Histories”, en L. Burton, *Gender and Mathematics Education: An International Perspective,* Londres, Cassell, pp. 47-59.

Turégano, P. (1985), "Experiencia sobre un cambio de actitud hacia las matemáticas en alumnos de magisterio", *Actas de las III Jornadas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, Zaragoza.

Valdez, E. (1998), *Rendimiento escolar y actitudes hacia las matemáticas: una experiencia en la escuela secundaria*, México, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

DATOS DE LOS AUTORES

Santiago Hidalgo Alonso
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de las Matemáticas,
Universidad de Valladolid, España
vicesg@uva.es

Ana Maroto Sáez
Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de las Matemáticas,
Universidad de Valladolid, España
amaroto@am.uva.es

Andrés Palacios Picos
Departamento de Psicología, Universidad de Valladolid, España
palacios@psi.uva.es

Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos

Gregoria Guillén Soler

Resumen: En este trabajo se mira la clasificación desde diferentes puntos de vista: desde los niveles iniciales, desde las matemáticas y desde la enseñanza de las matemáticas. Con el estudio teórico realizado se aporta la estructura en la que se encajan una gran variedad de situaciones/problemas relativos a la clasificación en el mundo de los sólidos. Se presenta una propuesta para tratar la clasificación con estudiantes de magisterio (futuros profesores de niños de 6 a 12 años), elaborada utilizando resultados que provienen de análisis teóricos y de la experimentación. Se analizan los diferentes tipos de clasificación que contempla esta propuesta, precisando sus características fundamentales y, para algunas clasificaciones, se indica la actividad geométrica que se puede desarrollar a partir de ellas. Asimismo, se apuntan algunas respuestas de estudiantes que informan, por un lado, de una manera de tratar la elaboración de definiciones de conceptos en esta propuesta y, por otro, del comportamiento de los estudiantes cuando resuelven algunas actividades planteadas al implementar la propuesta.

Palabras clave: clasificación, definición, enseñanza de la geometría de los sólidos, formación del profesorado, dificultades.

Abstract: In this research we look at classification from different points of view: from the first stages of learning, from mathematics and from the teaching of mathematics. The theoretical study carried out in this research provides the structure in which a great variety of situations/problems related to the classification in the world of solids fit in. We present a proposal in order to deal with the classification with teacher training college students. This proposal has been elaborated using results that come from theoretical analysis and experimentation. We analyse the different types of classification considered in this proposal, specifying its main characteristics. Moreover, for some classifications we indicate the geometrical activity which can be developed from them. Furthermore, we add some ans-

Fecha de recepción: 24 de septiembre de 2004.

wers by students that tell us how to handle the elaboration of definitions of concepts and which also tell us about the behaviour of students when they solve some of the activities set when implementing our proposal.

Keywords: classification, definition, teaching of the geometry of solids, teachers' training, difficulties.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las investigaciones realizadas en educación matemática relativas a la clasificación se han desarrollado en el marco del modelo de Van Hiele y se refieren a la clasificación de algunos tipos de polígonos. Cabe señalar las que han sido especialmente importantes en nuestro estudio por el análisis teórico que realizan del papel y función de la clasificación jerárquica en matemáticas (De Villiers, 1987, 1994) y las que han evaluado si los estudiantes pueden identificar y explicar relaciones entre subclases de polígonos (cuadriláteros o triángulos) (Burger y Shaughnessy, 1986; Corberán y otros, 1994; Fuys, Geddes y Tischler, 1988). Otros trabajos que también se han contemplado en el estudio que presentamos en este artículo se han desarrollado desde el punto de vista de la enseñanza (Castelnuovo, 1963, 1979; Craine y Rubenstein, 1993; Fielker, 1986, 1987; Maraldo, 1980); se refieren a la clasificación de cuadriláteros o hexágonos y las cuestiones que plantean, sus comentarios y "modo de hacer" se pueden trasladar a las clasificaciones que se hacen en el mundo de los prismas o de las pirámides.

La clasificación en el mundo de los sólidos ha sido menos investigada; entre los estudios realizados consideramos, por un lado, los que ponen de manifiesto análisis teóricos que se han realizado del proceso de clasificar o han proporcionado secuencias de actividades para trabajar la clasificación en el mundo de los sólidos organizadas según el modelo de Van Hiele (Guillén, 1991, 1997); por otro, los que señalan modelos de respuestas de estudiantes de magisterio para las tareas de identificar y enumerar ejemplos de subfamilias de prismas, juzgar, enunciar y justificar relaciones entre ellas, y representar estas relaciones mediante un diagrama, estudios que además subrayan algunas dificultades con las que se enfrentaron los estudiantes cuando resolvieron las tareas mencionadas (Guillén, 1999, 2001).

En el trabajo que corresponde a este artículo, del que ya hemos publicado una primera parte (Guillén, 2004), nos situamos en el marco del modelo de Van Hiele, considerando su evolución como consecuencia de la investigación realizada en el Instituto de Freudenthal. Esta evolución la describimos brevemente en Guillén (2004). En este marco de referencia, uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría es desarrollar el nivel de razonamiento de los estudiantes y que se avance en la progresiva matematización a través de la práctica matemática. Como indicamos en Guillén (2004), al entender como razonamientos lógicos procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración, en nuestro estudio nos fijamos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática, para avanzar en la progresiva matematización; en el artículo citado se prestaba atención a la *descripción y análisis* de objetos geométricos y en este artículo nos centramos en la clasificación.

Aquí, vamos a introducirnos en el tema con algunas cuestiones relativas a la clasificación y continuamos realizando un análisis de este proceso matemático; esto es, delimitamos diferentes tipos de clasificación y diferentes enfoques para la enseñanza. Hacemos hincapié en que nos podemos aproximar a la clasificación a través de diferente tipo de actividad matemática y también consideramos dificultades que pueden subyacer cuando se enseña-aprende la clasificación. Presentamos una propuesta para enseñar-aprender la clasificación con estudiantes de magisterio, elaborada a partir de la experimentación en este ámbito de estudio de propuestas previas organizadas según el modelo de Van Hiele. Nos centramos en los diferentes tipos de clasificación que contempla nuestra propuesta y para cada tipo indicamos sus características fundamentales. Por último, para un tipo de clasificación de los que hemos delimitado, analizamos con detalle la actividad matemática que se puede abordar al enseñar-aprender ese tipo de clasificación e indicamos algunas respuestas de estudiantes de magisterio que informan, por un lado, una manera de aproximarnos en esta propuesta a la formación de conceptos[1] y, por otro, del comportamiento de los estudiantes cuando resuelven algunas actividades planteadas al implementar la propuesta.

Puesto que la investigación que se presenta en este artículo tiene como ob-

[1] En este estudio se ha tomando como marco de referencia el trabajo de Freudenthal (1983) y utilizamos la "jerga" que introduce. Así, distinguimos *concepto* y *objeto mental*. Puig (1997) indica que "en una primera aproximación, la contraposición objeto mental-concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos". Apunta que "podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental-concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas como disciplina: los conceptos". Asimismo, en este trabajo se ha tomado de Vinner (1983) la manera de entender los conceptos; cuando se habla del *concepto* consideramos el concepto que se deriva de su definición matemática.

jetivo incidir de alguna manera para que en las clases de primaria y secundaria mejore la situación actual de la enseñanza-aprendizaje de la clasificación, para finalizar este apartado subrayamos nuestra concepción de la enseñanza de las matemáticas como actividad. Siguiendo a Fielker (1986, 1987), nos aprovechamos de sus ideas para precisar esta concepción. Las matemáticas se conciben como un gigantesco juego en el que podemos decidir nuestras propias reglas y cuál juego vamos a jugar, donde la única condición es que todo debe ser consistente por sí mismo y también debe producir la sensación de que la cosa vale. No hay definiciones dadas previamente: podemos decidir por nuestra cuenta. Y podemos dárselas a lo que nos parezca. Se tiene que dar la oportunidad a los estudiantes de que sientan la sensación del *poder*, inherente a las matemáticas de alterar las variables, examinar las consecuencias, recrear las definiciones, hacer elecciones, entretenerse con clasificaciones y crear nuevas definiciones para reconciliar los sentimientos propios ante las nuevas situaciones.

LA CLASIFICACIÓN. ALGUNAS PREGUNTAS

Vamos a comenzar con algunas preguntas sobre la clasificación, que pueden surgir al reflexionar sobre el conocimiento que se tiene de este proceso matemático y considerando que este proceso puede ser un contenido de la enseñanza primaria o secundaria.

1. ¿Qué se entiende por clasificación? ¿Cómo se percibe la clasificación?
2. ¿Cuáles elementos están implicados?
3. ¿Clasificaciones particiones o clasificaciones inclusivas en el comienzo del aprendizaje-enseñanza de la geometría?
4. ¿Cuáles problemas pueden ser interesantes para incluirlos en modelos de enseñanza propuestos para estos niveles?
5. ¿En el contexto de la geometría plana? ¿En la geometría de los sólidos? ¿En las matemáticas?
6. Los diferentes tipos de clasificación ¿se retoman en diferentes contextos y en tiempos diferentes?

En el trabajo que sigue se abordan estas cuestiones; si bien los apartados sólo hacen referencia a alguna de ellas, se puede notar que el análisis realizado aporta también respuestas para otras.

¿CÓMO SE PERCIBE LA CLASIFICACIÓN? UN ANÁLISIS DESDE DISTINTOS PUNTOS DE VISTA

La clasificación desde los niveles iniciales. Algunas preguntas

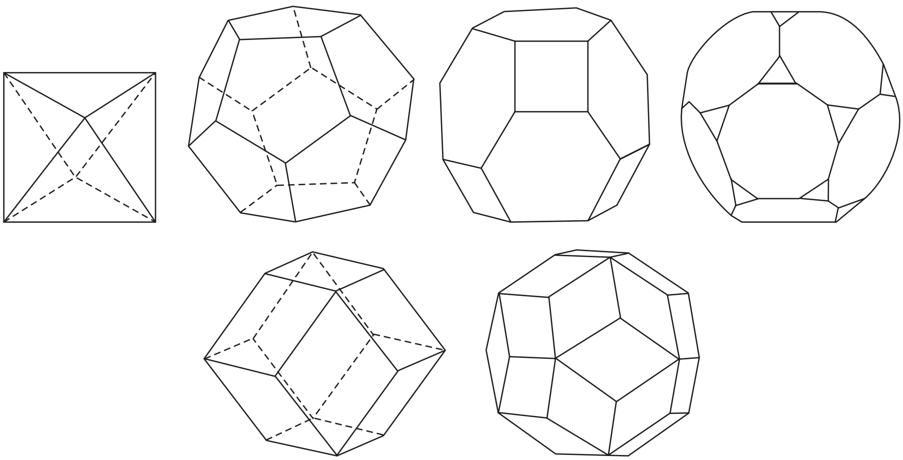
La clasificación tiene unos usos en distintos contextos cotidianos. También se utiliza en otras áreas; por ejemplo, en la biología, la química, etc. Estos usos que se hacen de la clasificación proporcionan unos significados que llevan a que en la enseñanza, al introducir el estudio de la geometría, podamos aproximarnos de diferentes maneras. ¿Cómo se percibe la clasificación al comenzar el estudio de la geometría? ¿Es una tarea de organizar? ¿De hacer grupos incluidos? ¿O es una tarea de separar? ¿O es una tarea de buscar todos los objetos de una familia? ¿Es una tarea de buscar los que se parecen? ¿Es una tarea de buscar parecidos y diferencias?

La clasificación desde las matemáticas. Tipos de clasificaciones

Cuando la clasificación se mira desde las matemáticas (como contenido matemático) y uno se centra en los componentes implicados en el proceso (el universo objeto de clasificación y el criterio utilizado para clasificar) y en el tipo de clasificación que se establece, de nuevo surgen algunas cuestiones: ¿Se considera todo el universo (por ejemplo, el mundo de los poliedros) o sólo un trozo (por ejemplo, en alguna familia de poliedros)? ¿Cuáles criterios cabe utilizar para separar en clases? ¿Hay criterios para separar en clases que no se basan en observaciones/percepciones? ¿En qué aspectos inciden? ¿Qué tipos de clasificación se pueden establecer?

Un análisis del contenido matemático de la clasificación puede llevar a distinguir la clasificación a priori y la clasificación *a posteriori*. De Villiers, (1994, p. 14) precisa ideas para estas clasificaciones: En una clasificación *a posteriori*, la clasificación de los elementos de una familia (por ejemplo, la de los paralelepípedos) se considera después de que se conocen durante algún tiempo los cubos, ortoedros, etc., y se han examinado minuciosamente sus propiedades. En general, la función más importante de una clasificación *a posteriori* es organizar conceptos. Por *clasificación a priori* se entiende que los procesos de generalización y especialización se utilizan deliberadamente para producir nuevos conceptos que se colocan inmediatamente en relaciones jerárquicas o en partición con los otros conceptos existentes. En una clasificación *a priori*, la función más importante es,

Figura 1 Dos poliedros regulares, dos poliedros arquimedianos y dos poliedros de Catalán

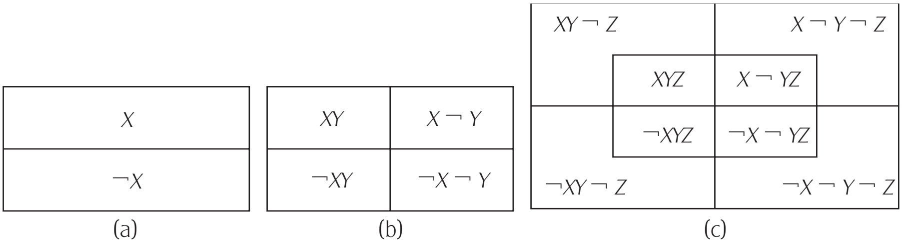


por tanto, claramente, la de descubrir/crear conceptos nuevos. Con una clasificación *a priori*, comenzamos con el concepto más especial, por ejemplo, los poliedros regulares (poliedros que tienen caras regulares, iguales y vértices iguales), y con la generalización establecemos como conceptos nuevos otras clases, como los poliedros arquimedianos (se mantienen las condiciones de regularidad de las caras y de igualdad de vértices, pero ahora las caras no son iguales), o los de Catalán (se mantiene la condición de igualdad de las caras, pero no son regulares y los vértices no son iguales). En la figura 1 se muestran dos ejemplos de cada una de estas familias.

Un análisis del contenido de la clasificación puede llevar también a otros tipos de clasificación. El listado puede ser bastante largo; por ejemplo, si se consulta Guillén (1991, pp. 23-40), donde se organiza el mundo de los poliedros, se encuentran las siguientes:

- Clasificaciones ingenuas, basadas en criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de los elementos de los poliedros. Dentro de este grupo se consideran clasificaciones dicotómicas y clasificaciones en las que las particiones se solapan. En este último caso se distingue si están implicados dos o tres criterios para clasificar. Así, por ejemplo, como mostramos en el diagrama de la figura 2, al considerar los tres criterios: regularidad de

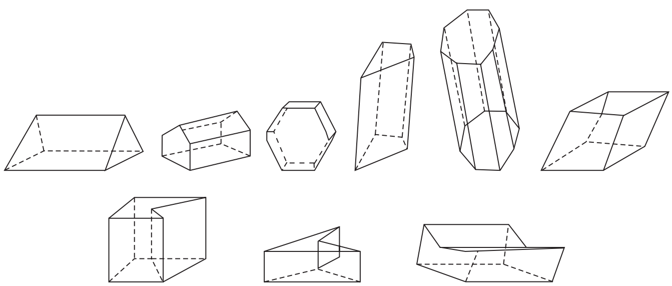
Figura 2



caras, *X*, igualdad de caras, *Y*, e igualdad de los vértices, *Z*, se establecen ocho familias y una de ellas, representada en el diagrama por *XYZ*, es la de los poliedros regulares platónicos.[2]

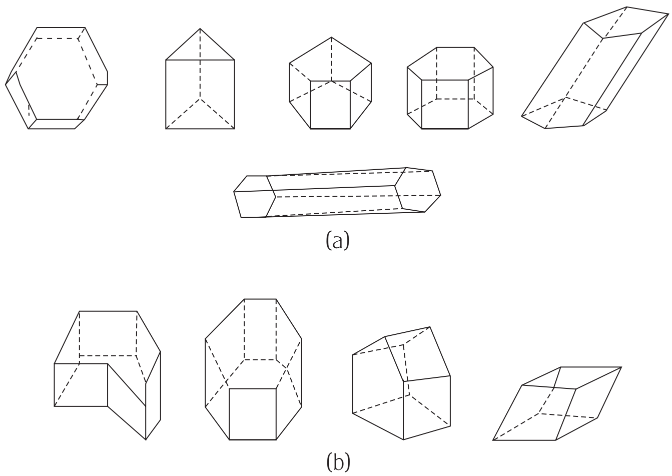
- Se consideran también otros criterios para clasificar basados en observaciones/percepciones que se hacen sobre los objetos de características que tienen un fuerte componente visual, lo que lleva a que se expresan con terminología visual. Las clasificaciones establecidas son particiones. Como ejemplo, podemos considerar las clasificaciones que se establecen con los criterios basados en las observaciones de que hay sólidos "inclinados" o de que hay sólidos "con entrantes". Así, se establecen dos familias disjuntas en cada caso. Considerando como universo objeto de clasificación la familia de los prismas, se establecen, con el primer criterio, la familia de los prismas rectos y la de los oblicuos; y con el segundo, la familia de los prismas cóncavos y la de los prismas convexos. En la figura 3 mostramos ejemplos de estas subfamilias.

Figura 3 Prismas rectos y oblicuos, cóncavos y convexos



[2] A la familia que no cumple el atributo *X* la representamos en el diagrama como ¬*X*.

Figura 4 Prismas de bases regulares y prismas de bases irregulares



- Otro criterio basado en observaciones/percepciones que cabe comentar se basa en la observación de que hay poliedros que “tienen base o bases”. Con este criterio se separan los poliedros que “tienen base o bases” de aquellos para los que no se distinguen. Y en las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides (poliedros que pertenecen al primer grupo), se distinguen las bases de las caras laterales. Las clasificaciones de este bloque se analizan con más detalle posteriormente.
- Al centrarse en las familias que “tienen base o bases”, hay clasificaciones que tienen que ver con uno de sus elementos: la base. Así, por ejemplo, en el mundo de los prismas se establecen los prismas de bases regulares y los prismas de bases irregulares; en la figura 4 se muestran ejemplos de estas subfamilias. O los prismas triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etcétera.
- También se pueden establecer clasificaciones con criterios cuantitativos, clasificaciones en las que hay implicados más de un criterio, que corrresponden a clasificaciones en las que las particiones se solapan, clasificaciones establecidas con criterios que son normas de construcción y clasificaciones inclusivas o jerárquicas. Estos tipos de clasificación los vamos a retomar al precisar nuestra propuesta para enseñar-aprender la clasificación con estudiantes de magisterio; en este apartado se indican las características fundamentales.

La clasificación desde la enseñanza de las matemáticas: enfoques, problemas para abordar y dificultades

Al realizar un análisis didáctico de la clasificación podemos establecer diferentes enfoques para la enseñanza, distinguir diferentes componentes de la actividad matemática y prestar atención a las dificultades y errores.

Los tres enfoques con los que se puede introducir la clasificación corresponden a las ideas que tienen los estudiantes sobre la clasificación y se han indicado ya. Se enlistan a continuación:

1. Organizando un mundo conocido, separándolo en clases disjuntas; enfoque que introducirá en la clasificación partición.
2. Organizando y estructurando un mundo conocido; enfoque que llevará a las clasificaciones jerárquicas.
3. Construyendo ejemplos, siguiendo normas de construcción o buscando los objetos que se parecen a otros, cumplen sus propiedades o verifican su definición; enfoque que conducirá a otra manera de abordar la clasificación en matemáticas y de la que también vamos a hablar.

Cuando los diferentes tipos de clasificación que se han delimitado al realizar un análisis del contenido se retoman desde el punto de vista de la enseñanza, surgen las siguientes preguntas referidas a cada tipo de clasificación: ¿Cuáles aspectos cabe resaltar de cada tipo de clasificación? ¿Cuáles problemas aparecen íntimamente ligados a cada tipo de clasificación?

En el apartado siguiente se aborda la primera pregunta. Respecto de la segunda, cabe subrayar lo extenso que resulta el listado de componentes de la actividad matemática que corresponden a cada tipo de clasificación. Entre ellos cabe señalar:

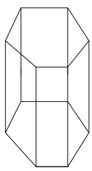
- Reflexionar sobre lo que puede considerarse o no como criterio de clasificación para un universo dado.
- Tratar otros problemas ligados a la clasificación:
  - Diferentes diagramas que las representan
  - Las relaciones entre familias
  - Las diferentes maneras de expresarlas
  - Situaciones diferentes porque cambia la relación que existe entre las familias o porque cambia la manera como se presentan las relaciones
  - Propiedades de las subfamilias establecidas

- Abordar problemas conectados con la clasificación que no son propios de ella. Por ejemplo, el nombre que se da a las subfamilias que se establecen.
- Tratar problemas que relacionan el proceso de clasificar con otros procesos:
  - El tipo de clasificación establecida y la descripción/definición de familias
  - La descripción/definición de familias y el tipo de clasificación que se establece
  - El tipo de clasificación establecida y la demostración de propiedades.

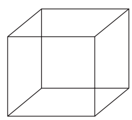
Si el punto de mira se pone en las dificultades que afrontan los estudiantes al abordar estos problemas, que les llevan a cometer ciertos errores, la investigación nos aporta información sobre ello. Son numerosas las publicaciones relativas al modelo de Van Hiele que han mostrado claramente que algunos estudiantes tienen problemas con las clasificaciones jerárquicas (como ejemplo, véanse De Villiers, 1987, 1994; De Villiers y Njisane, 1987; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Guillén, 1997, 2001; Van Hiele, 1986). Por ejemplo, en el contexto de la clasificación de triángulos y cuadriláteros, De Villiers (1987) determinó que "los niños son capaces de comprender a una edad muy temprana inclusiones de clases como 'los gatos y los perros son animales'; sin embargo, es, sin duda, psicológicamente mucho más difícil con figuras geométricas, ya que definir atributos es realmente más sutil y complejo". Apoyándose en los resultados de Mayberry (1981), concluye que la inclusión de clases entre diferentes clases de figuras geométricas (por ejemplo, la inclusión de los triángulos equiláteros en los isósceles y la inclusión del cuadrado en los rectángulos o incluso la inclusión entre diferentes pares de cuadriláteros) no conlleva psicológicamente la misma dificultad psicológica, aunque la estructura lógica podría ser la misma. En sus experimentaciones verificó que, de todas las tareas propuestas a los niños (identificación de tipos de figuras, uso de terminología geométrica, interpretación de definiciones dadas, argumentos deductivos de un paso, descripción verbal de propiedades de figuras, deducción más larga y clasificación jerárquica de conceptos geométricos), la clasificación jerárquica resultó ser la tarea más difícil. Además, en los cursos superiores se mejoraba muy poco en el rendimiento (De Villiers, 1987, p. 22, citado en Guillén, 2001).

Y en el contexto de la clasificación de los prismas, Guillén (2001) puso de manifiesto las dificultades con las que se enfrentaron estudiantes de magisterio cuando, una vez tratada la clasificación inclusiva de los cuadriláteros y después de haber establecido diferentes familias de prismas, se acometieron las tareas de: *i)* enumerar ejemplos de subfamilias de prismas que cumplían determinadas condiciones, *ii)* precisar el tipo de caras que pueden tener los ejemplos de estas familias, *iii)* juzgar y justificar si la relación entre familias de prismas que se enuncia o se da representada en un diagrama es correcta o incorrecta, y *iv)* establecer o representar si entre dos familias de sólidos dadas hay relación de inclusión, de exclusión, o tienen intersección pero no están incluidas una en otra. Las respuestas de algunos estudiantes, que indicamos a continuación, son ejemplos ilustrativos de algunas dificultades que se mencionan en este trabajo.

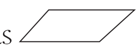
- Cuando se pedían ejemplos de paralelepípedos que no son ortoedros[3] se respondió: "Todos los que tienen caras paralelogramos. Las caras sí que pueden ser cuadrados, porque el cuadrado es paralelogramo. Y rombos y rectángulos también." "Todos los que tienen caras rectángulos. Ésos son los que son ortoedros. Los paralelogramos también pueden ser. Así, unos son ortoedros, como dice, y otros son paralelepípedos." Y para paralelepípedos que además son ortoedros se indicó: "Todos, pues todos los ortoedros son paralelepípedos. Pones rectángulos en las bases y los haces rectos, más o menos altos."
- Al responder a la pregunta de si los ejemplos de paralelepípedos que no son romboedros pueden tener alguna cara que sea rombo se indicó: "No pueden tener caras rombos; ninguna; si sus caras son rombos, entonces serían romboedros."
- Para juzgar la relación "Los prismas siempre son cubos", se dieron las siguientes respuestas: "Verdadera. Los cubos tienen bases iguales como los prismas, aunque en el cubo son iguales."



Ejemplo de un prisma y no es cubo (base hexágono)



Es cubo. Tiene caras cuadradas

Para la relación "Los prismas de bases cometas siempre son romboedros" se indicó: "Falsa. Por ejemplo, el paralelepípedo de caras  no es romboedro; no tiene forma de cometa (lados vecinos iguales,...). O se indica: "Falso, el ortoedro no es romboedro, no tiene todas las caras iguales".

[3] Al hablar de *paralelepípedos*, consideramos los prismas, cuyas caras son paralelogramos; como *ortoedros* consideramos los paralelepípedos, cuyas caras son rectángulos (incluimos los cuadrados como rectángulos); y como *romboedros*, los paralelepípedos con todas las caras iguales (rombos iguales, incluimos los cuadrados como rombos).

Y para la relación "Los prismas de caras laterales regulares son siempre prismas de bases regulares se respondió: "Cierta, los prismas de caras laterales cuadrados y la base regular son prismas de caras regulares."

- Al realizar una actividad en la que se tenía que seleccionar *siempre, nunca* o *se solapan* para expresar la relación que existe entre el paralelepípedo y los prismas de base cometa se seleccionó el término "nunca" y se aclaró: "Es 'nunca' pues no tienen ejemplos comunes (no tiene flecha el diagrama)" [la respuesta se dio a partir del diagrama que se había construido previamente que relacionaba las diferentes familias de prismas cuadrangulares y en esta respuesta se plasmó la idea de que cuando dos familias no estaban conectadas con una flecha significaba que no tenían ejemplos comunes].

Las dificultades que se han puesto de manifiesto en el contexto del mundo de los sólidos se han observado también cuando se ha tratado la clasificación de determinados tipos de polígonos (Guillén, 2001). De Villiers (1994) explica por qué las clasificaciones jerárquicas tienen gran dificultad:

> Varias dificultades que tienen los niños con la inclusión de clases jerárquica (especialmente los niños de mayor edad) no subyace necesariamente en la lógica de la inclusión como tal, sino que a menudo tiene que ver con el *significado* de la actividad, lingüístico y funcional: lingüístico en el sentido de interpretar correctamente el lenguaje usado en la inclusión de clases, y funcional en el sentido de entender por qué la clasificación jerárquica es más útil que la clasificación partición (p. 17, citado en Guillén, 2001).

Llegados a este punto, para finalizar el apartado, vale la pena resaltar que, al mirar la clasificación desde diferentes puntos de vista, se han delimitado una gran variedad de problemas que se podrían plantear en una propuesta de modelo de enseñanza para trabajar este proceso matemático; esto es, se pueden considerar criterios de clasificación con unas características u otras; para establecer las familias se puede considerar un criterio de clasificación o varios; también se puede variar el mundo que es objeto de clasificación; asimismo, se ha señalado que se pueden establecer diferentes tipos de clasificación y, para cada tipo de clasificación, se pueden abordar diferentes problemas para los que posiblemente los estudiantes enfrenten dificultades que los lleven a cometer determinados errores. Hasta ahora, en este trabajo se ha perfilado la estructura en la que se pueden encajar numerosas situaciones/problemas relativos a la clasificación.

UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR LA CLASIFICACIÓN. TIPOS DE CLASIFICACIÓN: CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES

En este apartado se presenta una propuesta para trabajar la clasificación en el mundo de los sólidos con estudiantes de magisterio, la cual se ha elaborado a partir de la experimentación en este ámbito de estudio de propuestas iniciales; para los tipos de clasificación que se incluyen se señalan sus características fundamentales.[4]

CLASIFICACIONES PARTICIONES

Por *clasificación partición* se quiere decir clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos que son disjuntos unos con otros. Se puede ver que estas clasificaciones se establecen a partir de relaciones de equivalencia. Se tiene una relación de equivalencia y las clases corresponden a las clases de equivalencia.

En los primeros niveles se percibe como que se separa en grupos disjuntos un mundo de objetos (el que se está clasificando) o como que se buscan analogías y diferencias entre los objetos de un grupo o entre los de un grupo y los de otro.

Las condiciones que se imponen a las clasificaciones particiones son:

- Una vez determinado el universo y el criterio de clasificación, cada ejemplo del universo debe pertenecer a una y sólo a una clase. Las subfamilias establecidas deben ser disjuntas.
- Las distintas subfamilias establecidas en el universo objeto de clasificación deben de dar cuenta de la totalidad de éste.

Hay varios tipos de clasificaciones particiones: Clasificaciones establecidas con un criterio (y podemos variar el criterio considerado) y clasificaciones establecidas con varios criterios.

Un ejemplo de clasificación partición se tiene, por ejemplo, cuando en el mundo de los prismas, se establecen los prismas rectos (PR) y los prismas oblicuos (PO); o cuando, en este mismo universo, se distinguen los prismas cóncavos (PC) y

[4] En Guillén (1991, 1997, 1999) se desarrollan con más detalle los tipos de clasificación que se incluyen en esta propuesta. Las características fundamentales, las figuras y los diagramas que mostramos aquí están tomadas casi textualmente de estos trabajos.

Figura 5

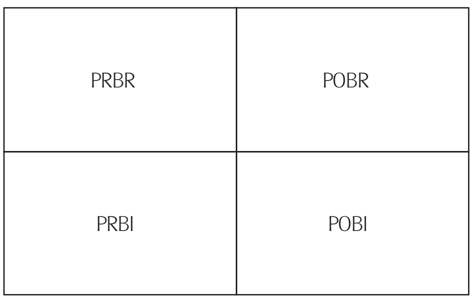
los prismas convexos (PX). La clasificación de estos ejemplos es una partición llamada *dicotomía,* y los diagramas de la figura 5 pueden representarla.

Si el problema se trata de forma general, considerando los criterios *X, Y, Z,* en la figura 2 se muestran *modelos* posibles para representar clasificaciones particiones establecidas con uno, dos o tres criterios.

Los aspectos fundamentales de una clasificación partición son el establecimiento de clases, el que se consideren particiones o particiones superpuestas y las relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento que hay entre las clases. Aunque en las clasificaciones donde se superponen las particiones, las clases resultantes, representadas por las casillas en el modelo, son disjuntas, también se pueden considerar las clases que corresponden a uno solo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras. Pero en estas clasificaciones, las inclusiones no son lo que se considera como aspecto más importante.

Por ejemplo, como mostramos en la figura 6, cuando en el mundo de los prismas clasificamos con los criterios que permiten separar los prismas rectos de los oblicuos, y los prismas de bases regulares de los prismas de bases irregulares, tenemos establecidas cuatro familias de prismas disjuntas: Prismas rectos de bases regulares, prismas rectos de bases irregulares, prismas oblicuos de bases regulares, prismas oblicuos de bases irregulares.

Figura 6



Al comparar cada una de estas familias con las que se obtienen al considerar sólo un criterio, aparecen relaciones de inclusión entre ellas: los prismas rectos de bases regulares están incluidos en la familia de los prismas rectos y en los prismas de bases regulares.

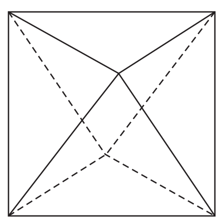
Al fijarnos en las características de las clasificaciones particiones, también se puede centrar la atención en el nombre que se da a las subfamilias establecidas. El problema de la clasificación-nombre se aborda poniendo nombres intuitivos: a una subclase que también cumpla una característica se le da el nombre de la clase aumentado con “algo” que unas veces hace referencia a la característica y otras veces no. En los ejemplos propuestos, el nombre hace referencia a la familia a la que pertenecen (los prismas); ahora bien, el ser recto o inclinado, o tener la base regular o irregular, sí que se refleja en el nombre de las subfamilias establecidas cuando clasificamos con el criterio correspondiente, pero la característica visual “tener o no tener entrantes” no se refleja en el nombre de cóncavos o convexos.

Cabe comentar también que, cuando un universo se clasifica con varios criterios, como se superponen las particiones, a un mismo elemento de una clase establecida con varios criterios se le pueden dar varios nombres diferentes, que provienen de cada una de las clasificaciones establecidas a partir de cada uno de los diferentes criterios. Por ejemplo, como mostramos en la figura 7, cuando en el mundo de los poliedros se consideran los criterios “ser antiprisma” y “ser bipirámide” se pueden separar en cada caso los poliedros que lo son de los que no lo son. Con los dos criterios se tienen establecidas cuatro clases. El octaedro pertenece a la clase de poliedros que son bipirámides y antiprismas. Además de

Figura 7

Antiprismas

	Sí	No
Sí	Octaedro	
No		



octaedro (nombre que le viene de que es poliedro regular), lo podemos llamar bipirámide cuadrada y antiprisma triangular.

Clasificaciones jerárquicas

Por *clasificación jerárquica* se quiere indicar clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Se puede ver que este tipo de clasificación, donde las clases están incluidas unas en otras, proviene de las relaciones de orden. Estas relaciones establecen una jerarquía entre los elementos del conjunto. Cuando todo par de elementos son comparables, están relacionados en un sentido –a*R* b o b*R* a–, entonces el orden es total; en caso contrario, cuando existe al menos una pareja de elementos que no son comparables, entonces el orden es parcial. En el ejemplo que damos en la figura 8b de la clasificación y ordenación jerárquica de los cuadriláteros, la relación es de orden parcial.

En los primeros niveles, las clasificaciones jerárquicas se perciben como organizar y estructurar un mundo conocido. Dado un mundo conocido (el universo), éste se organiza en diferentes estratos y se remarcan relaciones entre las familias establecidas.

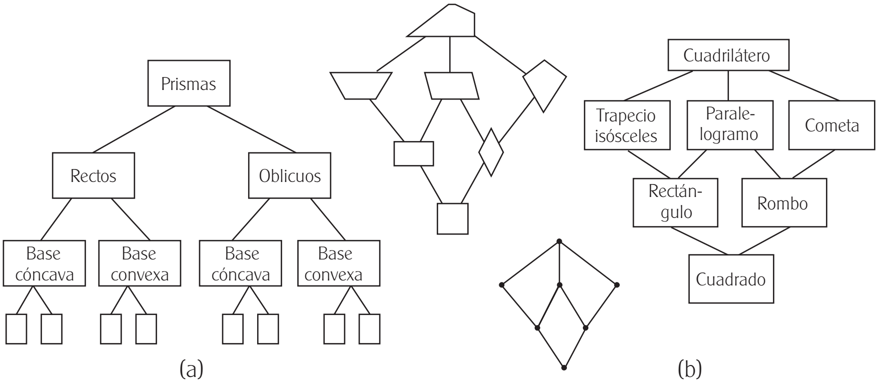
Los aspectos fundamentales de estas clasificaciones son el establecimiento de las clases y las relaciones de inclusión entre ellas. Se pueden representar mediante un modelo que es una red. Las clasificaciones inclusivas más naturales son en las que a las clases resultantes les damos el nombre genérico y uno o varios adjetivos.

En el ejemplo de la figura 8a el modelo está representado por un árbol, un caso particular de red. Otro ejemplo de este tipo, cuya representación no es un árbol, lo mostramos en la figura 8b y corresponde a una clasificación posible de los cuadriláteros. Respecto de estas clasificaciones también queremos subrayar que las familias establecidas pueden tener varios nombres: correspondientes a los de todas las familias que las contienen.

Clasificaciones con criterios de construcción

Vistas las clasificaciones particiones y las jerárquicas, cabe considerar ahora otras clasificaciones. En matemáticas, lo que se hace a veces al clasificar es fijarse en

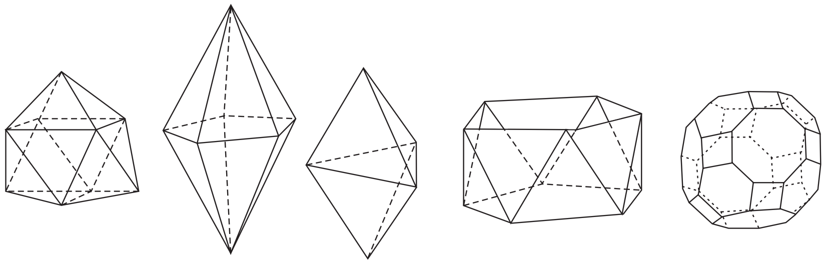
Figura 8



una característica de un conjunto de objetos y después se determinan todos los elementos que pertenecen a esa clase: en realidad, se hacen clasificaciones dicotómicas pues, por un lado, se consideran los objetos que cumplen la propiedad y, por otra, los que no la cumplen. En los primeros niveles se plantean actividades de identificación de formas que inciden en aspectos relativos a estas clasificaciones. Por ejemplo, cuando se pide que se identifiquen todos los ejemplos de una familia de sólidos (por ejemplo, de cilindros) en los objetos del entorno cotidiano del estudiante; o cuando dado un conjunto de objetos se quieren seleccionar aquellos que cumplen la(s) característica(s) de los objetos que se han considerado. Pero las actividades que se van a tratar en lo que sigue están inmersas en tareas de construcción.

En los primeros niveles, las *clasificaciones con criterios de construcción* se perciben como obtener ejemplos inmersos en procesos de construcción cuando no se construye al azar, sino siguiendo normas fijadas de antemano. Cabe señalar que cuando se utiliza material manipulable, también se puede clasificar. Los criterios que se pueden usar son condiciones que se imponen para construir; restricciones respecto al material que se puede utilizar o respecto de cómo juntar las caras alrededor de cada vértice del poliedro. Siguiendo las condiciones impuestas, se construyen los elementos de familias. Por ejemplo, cuando la norma que se impone para la construcción (criterio utilizado para clasificar) es que se utilicen polígonos regulares, se obtendrán *poliedros de caras regulares*. Entre ellos, los poliedros platónicos (regulares), los deltaedros –poliedros con caras triángulos equiláteros–, los poliedros arquimedianos –poliedros que tienen caras

Figura 9



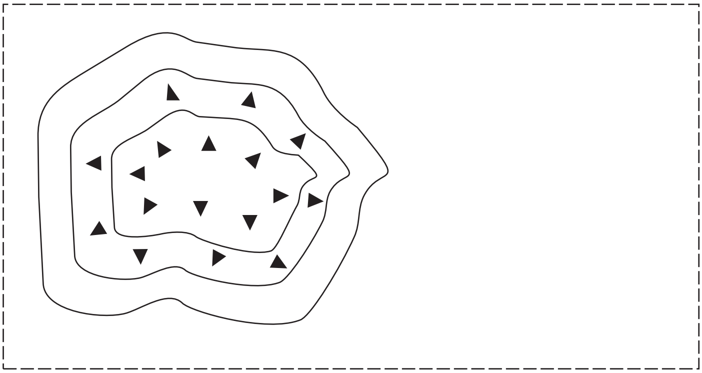
regulares de más de una clase y vértices iguales–, etc. En la figura 1 tenemos cuatro ejemplos y en la figura 9 tenemos otros cuatro. Y si la condición que se impone es que se utilicen polígonos iguales, se obtendrán *poliedros de caras iguales*; entre otros, los poliedros platónicos, los deltaedros, las bipirámides de base regular, etc. En la figura 1 tenemos cuatro ejemplos y en la figura 9 tenemos otros tres.

Puede notarse que estas familias ya se habían establecido también desde otros puntos de vista; se podían establecer basándose en observaciones –atributos– (considerando un criterio o varios) o por generalización (en las clasificaciones *a priori*). Sin embargo, la manera de obtenerlas es diferente y los aspectos relacionados con la clasificación, sobre los que se insiste en cada caso, también son diferentes.

En las clasificaciones basadas en observaciones, en cierto modo se tiene en mente todo el universo, los poliedros que pertenecen a una clase y los que no. Se hacen clasificaciones dicotómicas, esto es, se divide el universo y no nos preocupa si cada una de las partes tiene elementos o no. Sin embargo, cuando se construyen poliedros con unas condiciones impuestas, en realidad no se está clasificando, no se tiene el universo presente en su totalidad; el universo que se tiene en la cabeza se va ampliando a medida que se van construyendo más poliedros y, al finalizar, los poliedros en los que se piensa son exclusivamente los que se han construido. El modelo que lo representa se muestra en la figura 10.

Las clasificaciones basadas en criterios de construcción inciden en la determinación de los elementos de las clases; sólo después, si se quiere, se ve si las clases construidas están interconectadas o no. Sin embargo, como ya se ha dicho, en las clasificaciones basadas en observaciones, lo fundamental es el establecimiento de las clases, el que sean particiones o particiones superpuestas, o la relación de inclusión entre ellas.

Figura 10



Clasificaciones por analogía

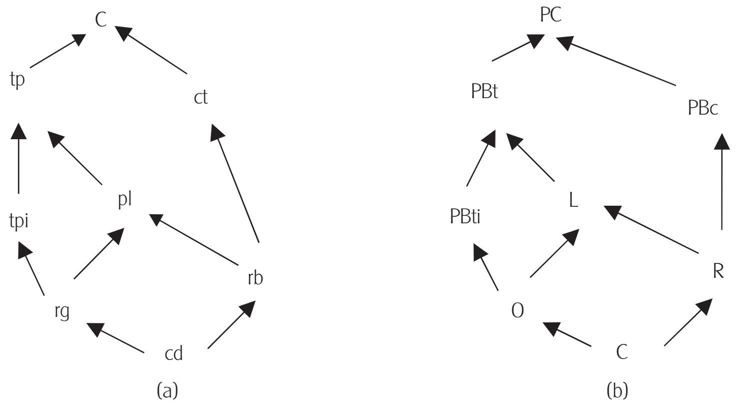
En un intento de relacionar el plano y el espacio, a continuación se va a considerar la que vamos a llamar *clasificación por analogía*. Se quiere decir con este tipo de clasificación que, una vez establecida una clasificación en el plano y delimitadas las analogías entre los elementos análogos del plano y del espacio, se tiene la clasificación en el espacio. Cuando se clasifica de esta manera, se subraya que algunos problemas resueltos en el plano se pueden aplicar para resolver los correspondientes en el espacio.

Los aspectos fundamentales de esta clasificación son el establecimiento de elementos análogos del plano y del espacio y la verificación de si se mantiene en el espacio una clasificación análoga a la del plano.

Hay que tener en cuenta que la analogía no siempre proporciona conjeturas correctas. Por ejemplo, cuando nos planteamos el problema de determinar todos los poliedros regulares, no podemos generalizar el resultado del problema análogo en el plano; mientras que hay infinitos polígonos regulares, sólo hay 5 poliedros regulares convexos. Ahora bien, la analogía sí funciona en la clasificación los prismas cuadrangulares. La clasificación de los cuadriláteros podemos aprovecharla para la clasificación de los prismas cuadrangulares. En la figura 11 mostramos diagramas de estas clasificaciones.[5]

[5] Los cuadriláteros implicados en el diagrama de la figura 11a son los siguientes: el cuadrado, *cd*; el rectángulo, *rg*; el rombo, *rb*; el paralelogramo, *pl*; el trapecio isósceles, *tpi*; la cometa, *ct*; y el trapecio, *tp*. Y los prismas cuadrangulares del diagrama 11b son: cubo, *C*; ortoedro, *O*;

Figura 11



Del párrafo anterior se desprende lo importante que puede ser establecer los elementos análogos entre el plano y el espacio y verificar si comparten relaciones que son pertinentes para el problema. En este caso, cabe señalar que, en los prismas de bases cometas, prismas de bases trapecios, isósceles o de bases trapecios se rompen las relaciones de igualdad y perpendicularidad entre los elementos límites (lado y cara lateral, respectivamente). En los prismas oblicuos, una igualdad de lados del polígono de las bases no implica que las caras laterales correspondientes sean iguales, ya que los ángulos de estas caras pueden cambiar. Pero aunque se rompen algunas relaciones entre los elementos análogos que aparecen en los diagramas correspondientes de elementos del plano y del espacio, puesto que estas relaciones sí se mantienen en algunas familias (por ejemplo, la propiedad del paralelogramo de *lados* opuestos iguales se verifica en los paralelepípedos: las caras opuestas son iguales) y para todas las familias de prismas cuadrangulares se siguen verificando las relaciones de paralelismo entre los elementos límites, consideramos que los elementos del plano y del espacio comparten relaciones que son pertinentes para el problema propuesto.

La construcción del diagrama que refleja una clasificación de los prismas cuadrangulares puede mostrar cómo se puede aplicar la analogía para explicar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares: se pasa el problema al plano después de establecer los elementos

romboedro, *R*; paralelepípedo, *L*; prisma de bases cometas, *PBc*; prisma de bases trapecios isósceles, *PBti*; prisma de bases trapecios, *PBt*.

análogos y se explica ahí la respuesta (se construye el diagrama que refleja la clasificación de los cuadriláteros); después se hacen las traducciones correspondientes de los elementos análogos.

Así pues, trabajar la clasificación de los prismas cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc., centrando la atención en la analogía que existe entre elementos del plano y del espacio que comparten relaciones, nos remite a la clasificación de cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etcétera.

En relación con estas clasificaciones, los trabajos de Fielker (1986, 1987) y Castelnuovo (1963, 1979) son de referencia obligada. Desarrollados desde el punto de vista de la enseñanza, hacen un estudio de la clasificación en el que van más allá de los trillados senderos euclideos, se soslaya el álgebra y se alejan del estudio rutinario de la clasificación de los triángulos y los cuadriláteros. En Fielker (1986, 1987) se presentan reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en nuestra enseñanza primaria y secundaria, sobre qué se enseña y cómo se enseña. Este autor expresa que aprender matemáticas incluye aprender a hacer matemáticas, lo que implica no sólo resolver problemas, sino crear problemas e inventar nuestras propias matemáticas, así como aprender las matemáticas de otras personas (Fielker, 1986, p. 6). Insiste en que al trabajar la clasificación:

> Son los niños quienes han de hacer las elecciones y no meramente llevar a cabo una clasificación rutinaria basada en la elección hecha por el maestro. La capacidad para tomar las propias decisiones es una parte esencial del proceso de clasificación y lleva consigo la capacidad de decidir sobre las decisiones, es decir, de alterarlas, cuando sea necesario, por razones de inconveniencia, inconsistencia o, tal vez, banalidad (Fielker, 1987, p. 13).

En la manera en que desarrolla el estudio, tanto para los cuadriláteros como para los hexágonos, plantea clasificaciones sucesivas, utilizando uno y dos criterios de clasificación que pueden referirse a igualdad de lados, paralelismo, número de ángulos rectos, simetrías, etc.; también se cambia la dimensión en la cual se realiza el estudio (de dos dimensiones se pasa a tres y a una dimensiones) y se relacionan entre sí polígonos (por ejemplo, el hexágono equiangular y el rectángulo) para los que se tienen ideas que no resultan convincentes para todos los que se relacionan.

Al centrarse en un criterio dado y en los cuadriláteros o hexágonos, las cuestiones que guían la actividad son: ¿Cuántos ejemplos distintos hay? ¿Cuáles son las posibilidades? ¿Qué significa... (el criterio que se está considerando)? ¿Qué pasa si sólo consideramos... (se indica sólo algunas condiciones del criterio que se está usando para clasificar)? ¿Qué ocurre si... (se modifica el criterio usado para clasificar)? ¿Cómo sabemos que no hay otros? ¿De cuántos modos se puede completar una parte del cuadrilátero (o hexágono) que se está considerando para que quede el polígono que cumpla las condiciones que se han impuesto? ¿Qué relaciones tienen los lados (los ángulos) de los cuadriláteros (hexágonos) que se han encontrado? ¿Cuáles longitudes elegir para los lados? ¿Cómo ordenarlas? ¿Cómo clasificar los diferentes casos? ¿A qué llamar diferentes? Clasificando los polígonos en general, considerando como variables en número de lados, ¿podríamos definir "isósceles" para un polígono y luego estudiar las consecuencias de cambiar el número de lados? ¿Qué ocurre si nuestra elección es limitarnos a los lados que concurren *formando ángulos rectos*? ¿Ángulos rectos internos y externos? ¿Resulta extraño pensar en el rectángulo como un hexágono? ¿Significa esto que el hexágono equiangular "corresponde" en cierto modo al rectángulo, del mismo modo que podríamos decir que el hexágono regular "corresponde" al cuadrado? ¿Cuadriláteros cruzados? ¿Cuáles son las propiedades que se conservan al cruzar los lados y cuáles aparecen como nuevas? ¿Cuadriláteros de una sola dimensión?

Puede notarse que con las actividades planteadas por Fielker (1986, 1987) se ha estimulado considerablemente la actividad matemática. Como él mismo subraya, "se han hecho surgir algunas hipótesis acerca de las relaciones entre las longitudes, hipótesis que quedan sin formular con precisión, poner a prueba, verificar, generalizar y demostrar" (Fielker, 1986, p. 8). Y si consideramos las cinco últimas cuestiones que hemos apuntado, el problema que abordan y la manera de hacerlo nos muestra una concepción de la enseñanza de las matemáticas y de la formación de conceptos, a la que ya hemos hecho referencia en la presentación, y que también se ve reflejada de nuevo en el último apartado de este trabajo.

Por otro lado, Castelnuovo (1963, 1979), con la construcción de los cuadriláteros con varillas (que tienen agujeros distribuidos a la misma distancia) que se juntan con chinchetas (las chinchetas se utilizan como mecanismos de unión), proporciona un entorno dinámico donde los cuadrados surgen como uno de los posibles rombos, el rectángulo como uno de los posibles paralelogramos, etc. Así, se puede explicar mediante la construcción que, por ejemplo, el cuadrado y el rombo tienen relación de inclusión: de todos los rombos que podemos construir, juntando los extremos de 2 varillas iguales, que se cortan en el punto medio de ambas perpendicularmente, el cuadrado es uno de ellos; cuando las varillas de partida son iguales. Por tanto, el cuadrado es un rombo particular. De la misma manera se puede explicar que el cuadrado es un rectángulo particular; las reglas de construcción ahora son que se parte de varillas iguales y que se juntan en el punto medio. El cuadrado es uno de los posibles rectángulos que se construyen al juntar los extremos de estas dos varillas de partida una vez que se han juntado por el punto medio de ambas; el cuadrado surge cuando las varillas se cortan perpendicularmente. Se puede concluir pues que *el cuadrado es un rombo y un rectángulo* particular. Si en la construcción imponemos otras condiciones para juntar las varillas que funcionan como diagonales de los cuadriláteros, se pueden establecer las relaciones siguientes: el rombo es un paralelogramo y una cometa particular, el rectángulo es un paralelogramo y un trapecio isósceles particular.[6]

Para finalizar este apartado, cabe centrar la atención en los nombres que aparecen en los diagramas de la figura 11. Puesto que unos corresponden a elementos del plano y otros a elementos del espacio, puede aparecer una nueva dificultad. En diagramas que construyen los estudiantes para estas clasificaciones, con frecuencia aparecen nombres de sólidos y de polígonos en cada uno de ellos.

ALGUNAS CLASIFICACIONES. ACTIVIDAD QUE PERMITEN ABORDAR

Analizados los diferentes tipos de clasificación que se incluyen en nuestra propuesta para enseñar-aprender este proceso matemático con alumnos de magisterio, en este apartado indicamos la actividad matemática que permiten abordar algunas clasificaciones concretas incluidas en esta propuesta. Se consideran los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides como universo de clasificación; y se estudian las clasificaciones que llevan a distinguir los rectos de los oblicuos, y las que separan los de base(s) regular(es) de los de base(s) irregular(es).

Los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, rectos y oblicuos. Ampliación del universo objeto de clasificación

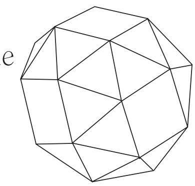
En este subapartado se centra la atención en los prismas rectos y oblicuos. Juntando dos polígonos (construidos con cartulina dura) con gomitas (juntan los vértices que se corresponden) se puede obtener la unidad base que presenta Castelnuovo (1979, citado en Guillén, 2004) para generar prismas rectos y oblicuos.

[6] En Guillén (1997, pp. 292-293; 1999) se trata con detalle cómo se puede proceder para facilitar que los estudiantes lleguen a establecer estas relaciones así como las dificultades que encuentran para ello.

Cabe mirar la figura 5 y revisar de nuevo las características fundamentales de la clasificación llamada dicotomía.

Lo que se destaca en este subapartado es que esta clasificación permite discutir sobre lo que puede ocurrir al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con un criterio dado.

En la experimentación que realizamos con niños de 12 años tuvo lugar la siguiente conversación, que informa sobre lo que puede ocurrir en clase al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con el criterio ser recto u oblicuo (Guillén, 1997):



E1: Y ése ¿dónde va? [*se refiere al cubo chato*] Yo creo que como está un poco torcido...

E3: Pero es que mira... se entra por aquí...

E1: Pero aquí hay una cara y aquí otra paralela que no está desviada [*se refiere a dos caras cuadradas opuestas*].

E2: Pero mira... este cuadrado y éste están... no están igual.

E1: Sí, están girados, pero en éstos también, en los antiprismas.

E3: Pero está como chafado, mira cómo se mete para adentro...

E2: Ése es de ésos que se meten para adentro.

E3: ¿Los cóncavos?

E1: Pero no se mete tanto. No hay un vértice así... [*hace un gesto con la mano como que se mete para adentro*]. Aquí se mete todo...

P: ¿Qué pensáis? ¿Es recto u oblicuo?

E1: Pues yo, ya no lo sé.

E3: Yo tampoco.

E2: Yo tampoco, pero creo que es recto.

P: Lo que quiero que notéis es que cuando no consideramos prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, no se tiene tan claro dónde incluir algunos sólidos, si en los rectos o en los oblicuos.

Como refleja este protocolo, clasificar con el criterio ser recto u oblicuo lleva a concluir que o bien uno se queda en un "trocito" de mundo de los poliedros (el de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides), o bien se tiene que precisar la idea de sólido recto y oblicuo para poder asignar cualquier modelo en una de las familias establecidas.

Con esta clasificación, se hace notar que resulta necesario nombrar siempre el universo que se somete a clasificación, al igual que el criterio que conduce a establecer las familias y las familias que se establecen.

Respecto de las tareas de descripción de las familias, también cabe hacer comentarios. En el subapartado siguiente se indican dificultades que conllevan estas tareas, dificultades que provienen de las ideas que pueden tener los estudiantes sobre los conceptos implicados en ellas o por los problemas de lenguaje que conlleva expresarlas de manera precisa.

Los prismas rectos y oblicuos. Sobre descripción de familias. Dificultades

En este subapartado se centra la atención en las propiedades de estas familias (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) relativas a la altura y a los diferentes tipos de ángulos de los sólidos.

Cabe señalar que, para enumerar las propiedades relativas a la altura, se tiene que admitir que la altura de un prisma oblicuo, dibujada desde un punto de la base (de un prisma o de un antiprisma) o desde el ápice (en una pirámide o una bipirámide), puede caer fuera del prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide). Tal como indicamos en Guillén (1997, pp. 275-276) en las experimentaciones que hemos realizado hemos constatado que algunos estudiantes tienen incluido en el objeto mental de este concepto el atributo de que tiene que quedar dentro del sólido, o en la superficie; o de que la altura de un sólido tiene que unir centros de bases (se refieren a los centros de gravedad), o ápices y centros de bases; esto es, bastantes estudiantes tienen un objeto mental de altura de un prisma basada exclusivamente en los prismas rectos. En los prismas oblicuos también identifican la longitud de la altura y la de la arista lateral. Otros estudiantes, aunque no identifican ambas longitudes, no pueden indicar cuál es la altura del prisma oblicuo; expresan que "como está torcido...".

Cuando cuestionamos a niños de 12 años qué altura había que poner a un estante para que el prisma oblicuo cupiese cuando estaba apoyado en una de sus bases, hubo niños que respondieron, que la longitud de las aristas laterales. También hubo estudiantes de magisterio que dieron esta respuesta. Otros niños la señalaron correctamente, aunque no pudieron expresar una idea de ella en términos geométricos: "Pues de aquí abajo a aquí" [Señaló perfectamente la altura: un dedo lo puso en un vértice de la base de arriba y el otro en la mesa siguiendo la "vertical"].

En todas nuestras experimentaciones (con niños de 12 años y con estudiantes de magisterio), hemos comprobado que los estudiantes no son reacios a admitir, una vez señalado por el profesor, que la altura de un prisma oblicuo, dibujada desde un punto de la base (de un prisma o de un antiprisma) o desde el ápice (en una pirámide o una bipirámide), puede caer fuera del prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide). Podemos encontrar la explicación en el hecho de que en los libros de texto usuales de primaria se presenta dibujada la altura de un prisma y de una pirámide oblicuos que reflejan esta característica visual. De hecho, algunos niños de 12 años expresaron que tenían en cuenta estos dibujos:

E1: Yo ahora pienso que a lo mejor sería desde el centro del prisma para abajo esa altura, porque cuando lo tienes recto [*y busca un modelo en el que apoyarse; coge un prisma de bases irregulares*], éste vamos a suponer, si esto fuera el centro [*y lo señala*] se mediría de ahí abajo, entonces ahí igual.

P: ¿Y esta línea no es recta? [*Con la mano señala una recta inclinada.*]

E2: Esa línea es inclinada.

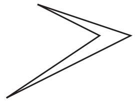
E1: Pero es recta. [*Se ríe.*] O sea, horizontal, o sea, es que no sé...

E3: Perpendicular a la base esa. Y si se sale como aquí [*señala un prisma oblicuo*], pues entonces perpendicular a la mesa.

E1: Sí, como en el dibujo de los libros.

En las experimentaciones también hemos verificado que muy pocos estudiantes de magisterio enumeran propiedades de las familias tratadas, relativas a su altura, a menos que el profesor lo indique explícitamente; al trabajar esta clasificación, se puede dirigir la actividad para que los estudiantes caractericen estas subfamilias en términos de altura. Un prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide) es *recto* cuando al dibujar la altura desde el centro de una base (desde el ápice) cae en el centro de la otra base (cae en el centro de la base o pasa por ella y cae en el otro ápice). En los prismas y antiprismas, cuando no ocurre esto, e incluso la altura puede caer fuera de la base del sólido, los sólidos son entonces *oblicuos o inclinados.*

Estas actividades permiten también remarcar que, mientras que en los prismas y antiprismas rectos, la altura dibujada desde un punto de la base no va a caer fuera de la otra base, en las pirámides y bipirámides, rectas, la altura dibujada desde el ápice puede caer fuera del polígono de la base.



Las pirámides rectas presentan un caso interesante respecto de los prismas y antiprismas. Se tienen ejemplos de pirámides rectas, de aspecto francamente raro, donde el ápice se corresponde con un punto que no pertenece al polígono; esto ocurre cuando la base es un polígono cóncavo que tiene el centro fuera de él. Por ejemplo, cuando la base es el polígono de la figura.

Estos polígonos también pueden utilizarse como bases de los prismas, pero ahora lo que se puede discutir es si al considerar los prismas que tienen estas bases se siguen manteniendo en esta familia todas las propiedades relativas a la altura que se habían enumerado sin haber pensado en estos modelos como ejemplos. Se puede aclarar que consideramos como centro del polígono el centro de gravedad y que se supone que existe, aunque quede fuera del polígono (Guillén, 1997, p. 276).

Con respecto a las propiedades relativas a los diferentes tipos de ángulos de los sólidos, cabe subrayar las grandes dificultades que presentan para los estudiantes. Como se ha señalado en Guillén (1997), puede ser que no se midan correctamente los ángulos diedros, que no se aplique correctamente la idea de ángulos de los vértices, o que se presenten problemas de lenguaje. Por ejemplo, la propiedad de los prismas rectos –"Los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base"– se asocia a todos los prismas, porque los estudiantes no miden adecuadamente los ángulos diedros de los prismas oblicuos: en vez de seleccionar segmentos perpendiculares a la arista, seleccionan los lados correspondientes de la base. Para que los estudiantes descubran esta propiedad se puede prestar la atención en si se verifica o no en ejemplos concretos de prismas rectos y oblicuos; cabe fijarse en la medida del ángulo diedro de dos caras laterales y, a continuación, en la medida del ángulo correspondiente de la base.

Las experimentaciones realizadas con niños de 12 años han mostrado que éstos tienen dificultades para seleccionar de manera adecuada los segmentos que reflejan la medida del ángulo diedro correspondiente (los perpendiculares a la arista que forman las caras) y se muestran reacios a abandonar la idea de que hay que elegir los segmentos paralelos a los lados de la base. Los segmentos que suelen elegir los estudiantes de magisterio también son los paralelos a los lados correspondientes de las bases, pero no muestran resistencia a aceptar que los segmentos que hay que seleccionar para medir un ángulo diedro son, uno de cada cara que forman el ángulo, perpendiculares a la arista y que se juntan en un vértice. Ellos mismos llegan a expresarlo cuando se les proporcionan dos pentágonos de polydron o de troquelados unidos (representaban un ángulo diedro) en los que se ha dibujado previamente la altura desde un vértice y los polígonos se han juntado de manera que las alturas concurren en el mismo punto de la arista que ellos forman al juntarse. Con este modelo, los estudiantes de magisterio pueden observar que los segmentos que mejor representan la abertura de los pentágonos son los que hay dibujados y descubrir así que estos segmentos son perpendiculares a los lados de los pentágonos o a la arista que forman al juntarse.

Ahora bien, verificar si en los prismas "los ángulos diedros de las caras laterales coinciden siempre con el ángulo correspondiente del polígono de la base" no resulta tan sencillo; ni aun utilizando material, resulta inmediato convencerse de que ese enunciado no es una propiedad de los prismas pues sólo la verifican los prismas rectos. Incluso cuando la comprobación se hace en modelos de prismas oblicuos, tanto los niños de 12 años como estudiantes de magisterio aceptan esta afirmación como propiedad.

En las experimentaciones realizadas con niños de 12 años, disponíamos de varillas, que los niños podían utilizar como representantes de los segmentos que había que elegir, y de un dispositivo comercializado para medir ángulos diedros. Los niños disponían de un modelo de prisma oblicuo, colocaban las dos varillas juntas perpendicularmente a la arista lateral y las desplazaban paralelamente hacia la base. Pero, en este caso, el trabajar con varillas creó nuevos problemas. Al llegar al vértice del prisma, giraban el ángulo formado por las varillas hasta hacerlo coincidir con el ángulo de las bases. Así, no aceptaban que el ángulo diedro de las caras laterales no coincidía con el correspondiente de la base. Las siguientes respuestas dan prueba de ello.

> E1: Mira, ponemos esto [*las varillas*] paralelo a esto... más o menos; paralelo no, perpendicular [*las coloca perfectamente; se preocupa de que las varillas no se abran más ni menos y las lleva al vértice del prisma*]. Y no. No, no... ¿No daaa? No, pero sí que da. [*Vuelve a hacerlo.*]
>
> E2: Haces así, lo pones así, sigo subiendo y aquí [*en el vértice*] éste se para [*la varilla que está sobre un lado del polígono de la base*] y éste sigue subiendo. Y llega un momento en que coincide...
>
> E1: Aquí, si lo subes todo paralelo [*las dos varillas*], no. Pero si subes éste [*una varilla*] más, sí que es. ¿No? Pero los ángulos son iguales, aquí y aquí, y aquí... [*las dos varillas con una abertura fija las coloca en diferentes sitios giradas sobre la mesa*]. Mira, si un ángulo lo pones aquí y es de 90° o lo pones aquí da lo mismo, porque sigue siendo de 90° [*lo muestra, desplazando el ángulo que ha construido con las varillas*]. Y si lo pongo de pie también.
>
> Mira, yo no la cambio [*se refiere a la abertura*] y sí que da. Nadie lo puede negar. Dejo la misma abertura. No me entendéis. Sólo hago así [*hace gesto de girar*], pero dejo la misma abertura...

Cuando indicamos que al mover la varilla dejaba de ser perpendicular a la arista, se aceptó que efectivamente dejaba de serlo, pero su resistencia a cambiar de idea lo llevó a no tenerlo en cuenta, y a justificarlo de nuevo, basándose en el hecho de que los ángulos no cambian porque cambie su posición.

> E1: A ver, una pregunta: si tenemos dos lados así ∟, mide 90° ¿no? Y si los tenemos así ∨ también, ¿no? Pues ya está... [*toma dos varillas unidas*] O sea que si lo pongo así y así [*mueve el ángulo que ha construido para colocarlo en diferente posición*] es que ya no está lo mismo...

Sin embargo, cuando dibujamos en los prismas varios segmentos paralelos a los elegidos, sobre varios puntos de la arista, de manera que nos íbamos acercando hacia la base, e introdujimos el instrumento de medida para medir ángulos diedros (permite dejar fija una abertura, cosa que no ocurre con las varillas), que lo colocábamos sobre estos segmentos y sobre los lados de la base, se aceptó de inmediato que los prismas oblicuos no verifican la propiedad. Es decir, que en los prismas oblicuos algunos ángulos diedros de las caras laterales no coinciden con el ángulo correspondiente del polígono de la base.

> P: Bueno, vale, vamos a medir los ángulos con este instrumento que no cambia la abertura. [*elige un prisma muy oblicuo y en él selecciona un ángulo diedro que remarca mucho que no coincide con el ángulo correspondiente de la base. Muestra en un modelo cómo medir el ángulo que forman dos caras.*
>
> *Todos los niños quieren medir ángulos diedros con este instrumento de medida*].
>
> E1: A ver. Lo pongo perpendicular... Ya está. Lo llevo a la base... Y no coincide. Bueno... pero... Algunos, no todos.
>
> P: Hazlo con cuidado, para que realmente lo pongas perpendicularmente a la arista y no cambies la abertura al sacarlo, y mira a ver si coinciden o no en los demás.
>
> E1: [*Mide el ángulo diedro con el instrumento y dice*] Por muy poco...
>
> E2: Claro. Pero no coincide.
>
> E3: Eso... no coincide.

Los estudiantes de magisterio no mostraron tantas resistencias para llegar a aceptar que el enunciado era propiedad de los prismas rectos, pero la aceptación tampoco fue inmediata a partir de argumentos basados en los segmentos que formaban el ángulo diedro. Sólo al ver prismas de bases regulares (por lo que tenían ángulos iguales) que además estaban muy inclinados, visualizaron claramente que los ángulos diedros de las caras laterales no eran iguales, y así concluyeron que cada uno de ellos no podía ser igual al correspondiente de la base

Otra propiedad que también implicó grandes dificultades para que algunos estudiantes de magisterio la asociaran a los prismas rectos de bases regulares fue: "Los ángulos de los vértices son iguales"; en vez de aplicar la idea de ángulo de los vértices como "la suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice", se aplicaba que en ese vértice se juntan ángulos de dos medidas (los de las caras laterales, que son de 90° cada uno, y el de la base).

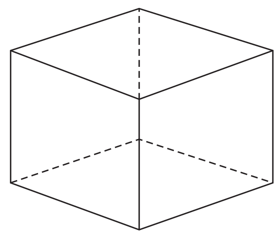
Respecto de la descripción de los prismas oblicuos, también cabe subrayar la dificultad que implica para los estudiantes obtener propiedades de esta familia a partir de la negación de las propiedades de los prismas rectos. En Guillén (1997), se indica que es muy usual que no se niegue de manera matemáticamente correcta el cuantificador *todo* que aparece en ellas. Si bien algunos estudiantes identifican como prismas oblicuos modelos con alguna cara lateral rectángulo o cuadrado (todas ellas no lo son), como propiedades de los prismas oblicuos indican "ninguna cara lateral es rectángulo", "no tiene rectángulos en sus caras laterales", etc., propiedades que excluyen los ejemplos mencionados.

Prismas rectos y oblicuos, prismas de bases regulares e irregulares. Acerca de la formación de conceptos

En este subapartado se trata un problema especialmente interesante que ya hemos adelantado en la presentación; tiene que ver con la formación de conceptos. Teniendo en cuenta la nota 2, en la que se indica que cuando se habla del *concepto* se considera el concepto que se deriva de su definición matemática, en este subapartado se trata el proceso de elaboración de definiciones.

La manera de tratar un problema refleja a veces una concepción de la enseñanza de los conceptos. Con el problema que vamos a tratar aquí se refleja una concepción de la enseñanza de las definiciones en las que éstas se conciben como el final de un largo proceso (examen de ejemplos, análisis de propiedades, clasificaciones, etc.) y, además, parece que los conceptos no se terminan de adquirir nunca. Esto es, consideramos que las definiciones tampoco son inmutables. Compartimos con Puig (1997) una concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos que no supone que hay un objeto ideal preexistente y lo que hace la actividad matemática es descubrir sus propiedades; sino que consideramos que los conceptos no permanecen inmutables una vez creados, y lo que nos interesa en la enseñanza es la creación de nuevos conceptos al estilo de Lakatos: "El resultado del proceso que presenta Lakatos de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto de poliedro que se correspondería al objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos" (Puig, 1997, p. 59).

En lo que sigue, se van a considerar algunos paralelepípedos para explicar cómo el problema de dar nombre a algunos poliedros puede suponer un problema de definición o un problema de clasificación y de definición. Esta actividad puede servir como situación para mostrar cómo ante la aparición de un elemento que no se había previsto, ejemplo de un determinado concepto, uno puede seguir caminos diferentes: o se revisa la definición dada para este contenido geométrico o "uno se retira a un mundo más seguro", esto es, en nuestro problema concreto, restringimos el universo objeto de clasificación con el criterio considerado.



La actividad comienza considerando el modelo de la figura formado por cuatro cuadrados y dos rombos y uno se cuestiona si es un prisma recto o un prisma oblicuo. Si la cuestión se plantea a diferentes estudiantes, es muy probable que estos prismas se identifiquen como prismas rectos y como prismas oblicuos, especialmente si los modelos se muestran colocados en diferentes posiciones (apoyados en una cara cuadrada y en una cara rómbica no cuadrada).

Puesto que una de las características que tiene un gran peso en el objeto mental que los estudiantes construyen para este tipo de clasificación es que estas subfamilias son disjuntas, caben dos posibilidades: o se tiene que precisar la idea de prisma recto y oblicuo para que las familias de los prismas rectos y oblicuos sean excluyentes o disjuntas, o se rompe con esta idea y se acepta que estas subfamilias tengan elementos comunes, con lo que la clasificación establecida no sería una dicotomía.

A continuación, se presentan las "ideas" que dieron un niño de 12 años (E1) y un alumno de magisterio (E2) cuando, en sesiones de laboratorio o en el contexto de clase respectivamente, abordamos este problema:

> E1: No, sí. Mira. Si la mayoría... Si al ponerlo de distintas formas la mayoría son oblicuos, pues entonces yo digo que es oblicuo, y si la mayoría son rectos, pues entonces yo digo que es recto.

E2: Un prisma es recto si podemos encontrar dos caras que se juntan con rectángulos y, en otro caso, el prisma es oblicuo.

Este problema es mucho más interesante continuando con clasificaciones establecidas con criterios relativos a las bases. Con la clasificación que separa los poliedros "que tienen base o bases" de los que no las tienen, se puede discutir, al igual que se ha hecho al separar los sólidos rectos de los oblicuos, sobre lo que puede ocurrir al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con un criterio dado.

Y la clasificación que centra la atención en la regularidad del polígono de las bases proporciona un problema para mostrar de nuevo cómo se van perfilando las ideas de los conceptos a medida que aparecen objetos que nos obligan a ello. El paralelepípedo del que hemos hablado, formado por cuatro cuadrados y dos rombos, se puede incluir en las dos familias establecidas (las de bases regulares y las de bases irregulares), dependiendo de los pares de caras que se elijan como bases.

Si intentamos evitar este problema de la misma manera que cuando se planteó un problema análogo al identificar el modelo como prisma recto u oblicuo, para los prismas de bases regulares y para los prismas de bases irregulares surgirán ideas como las siguientes: un prisma es de bases regulares si podemos encontrar dos caras regulares que pueden ser bases de esa familia. En caso contrario, es de base irregular.

Pero al clasificar con los dos criterios conjuntamente, de nuevo surgen problemas. Llegados a este punto, tendremos que elegir revisar de nuevo las ideas que se han dado para los prismas rectos y oblicuos, y de bases regulares e irregulares, o aceptar que las clasificaciones que se establecen no son disjuntas. A continuación, se da cuenta de cómo se continuó en una de nuestras experimentaciones con estudiantes de magisterio. Se indican algunas propuestas de los estudiantes:

E1: Yo propongo que para los modelos para los que se pueden elegir varios pares de caras como bases, elijamos un par u otro según si cumple o no la propiedad que nos interesa resaltar. Por ejemplo, entre rectos y oblicuos, nos fijamos en ser recto, y las bases que consideramos son las que llevan a ello (los rombos). Y lo mismo para los prismas de base regular e irregular; las bases que consideramos son las que llevan a que sea de base regular (los cuadrados).

[...]

E2: ¿Que ocurre cuándo clasificamos con los dos criterios ser recto u obli-

> cuo y ser de base regular o irregular? ¿Cómo consideramos este modelo, recto de base irregular u oblicuo de base regular? ¿O lo consideramos también de la familia que cumple ambas propiedades que nos interesan, los prismas rectos de bases regulares (PRBR)?
>
> E3: Pero es que si los consideramos rectos de base regular, los pares de bases que hay que elegir en cada caso no son los mismos. Para verlo como recto, se coge de base el rombo y para verlo de base regular, el cuadrado. ¿Eso puede ser?

La propuesta más aceptada fue:

> Dado que todo par de caras pueden ser bases, podemos elegir cualquier par de caras y ser coherente con ello.

Así, el modelo se va a incluir en recto de base irregular u oblicuo de base regular según las preferencias de los estudiantes. Se resalta también la necesidad de que se indiquen las caras que se han elegido como bases y que también se podría elegir otra opción, con lo que los resultados serían diferentes.

En las experimentaciones realizadas, llegados a este punto, se revisan las clasificaciones implicadas en el problema y se hace notar cómo la observación de que los poliedros tienen bases o base no es un buen criterio de clasificación considerando cualquier universo. La dificultad que conlleva precisar lo que se entiende por base o bases de los poliedros lleva a que se opte por restringir el universo, para clasificarlo con este criterio, a un "trocito" del mundo de los poliedros (el formado por los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides).

Planteado de nuevo el problema en el que estamos implicados, y una vez observado que el problema aparece porque en ese modelo todo par de caras pueden ser bases del prisma, los estudiantes proponen eliminar también del "trocito de mundo" objeto de clasificación con este criterio, el de las subfamilias que tienen todas sus caras de la misma familia, para las que todo par de caras pueden ser bases. La respuesta siguiente de uno de los estudiantes muestra lo razonable que encuentran esta solución:

> Claro, si todas las caras pueden ser bases, para qué hablar de base regular, tendrían que serlo todas también, porque si no, ¿cuál de todas cogemos para mirar si es regular o no? Si pueden ser todas ellas bases... Según la que coja me sale una cosa u otra... Mejor quitar esa familia también.

REFLEXIÓN FINAL

Queremos resaltar que la actividad matemática que surge a partir de una situación/problema puede ser un criterio para decidir si incluirla o no en una propuesta para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La actividad de clasificar es fundamental en las matemáticas, pero hay que prestarle más atención en las clases de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi gratitud a la doctora. Olimpia Figueras, responsable del proyecto "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas", por su invitación para que impartiera una conferencia sobre "La clasificación en el marco del modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos", a fin de dar a conocer parte del trabajo desarrollado en mi tesis doctoral, en el "Segundo Seminario sobre Rendimiento Escolar en Matemáticas". También quiero agradecer a la Escuela Normal Superior del Estado de México (ENSEM), por haber propiciado este encuentro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burger, W.F. y J.M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, núm. 1, pp. 31-48.

Castelnuovo, E. (1963), *Didactica della Matematica Moderna*, Florencia, La Nuova Italia. [Trad. castellana: *Didáctica de la matemática moderna*, México, Trillas, 1970.]

—— (1979), *La Matemática. La Geometría.* [Trad. catalana: *La matemática. La geometría*, Barcelona, Ketres, 1981.]

Corberán, R., A. Gutiérrez, P. Huerta, A. Jaime, J.B. Margarit, A. Peñas y E. Ruiz (1994), *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

Craine, T.V. y R.N. Rubenstein (1993), "A Quadrilateral Hierarchy to Facilitate Learning in Geometry", *The Mathematics Teacher*, vol. 86, núm. 1, pp. 30-36.

De Villiers, M.D. (1987), "Research Evidence on Herarquical Thinking, Teaching Strategies and the Van Hiele Theory: Some Critical Comments", *Research Unit for Mathematics Education (Rumeus),* núm. 10, Stellenbosch, Sudáfrica.
—— (1994), "The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 1, pp. 11-18.
De Villiers, M.D. y R.M. Njisane (1987), "The Development of Geometric Thinking among Black High School Pupils in Kwazulu (Republic of South Africa)", en J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Montreal, vol. 3, pp. 117-123.
Fielker, D.S. (1981-1983), "Removing the Shackles of Euclid", *Mathematics Teaching,* pp. 95-104. [Trad. castellana: *Rompiendo las cadenas de Euclides,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, 1987.]
—— (1986), "Hexágonos", *Epsilon,* núm. 8, pp. 5-10.
Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht, D. Reidel.
Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents", *Journal for Research in Mathematics Education,* monografía núm. 3, Reston, NCTM.
Guillén, G. (1991), *El mundo de los poliedros,* Madrid, Síntesis.
—— (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje,* tesis de Doctorado, Valencia, Universitat de València. [Publicada en 1999 en la colección: Tesis doctorals en Microfitxes, Valencia, Universitat de València.]
—— (1999), "Una clasificación inclusiva de prismas cuadrangulares. Dificultades", *Actas de las IXas JAEM,* Lugo, septiembre, pp. 535-537.
—— (2001), "Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 19, núm. 3, pp. 415-431.
—— (2004), "El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica", *Educación Matemática,* vol. 16, núm. 3, pp. 79-101.
Maraldo, S. (1980), "Properties of Quadrilaterals", *The Mathematics Teacher,* vol. 73 núm. 1, pp. 38-39.
Mayberry, J. (1981), *An Investigation of the Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers,* Ann Arbor, Univ. Microfilms.
Puig, L. (1997), "Análisis fenomenológico", en L. Rico (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Barcelona, Horsori, pp. 61-94.

Van Hiele, P.M. (1986), *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Londres, Academic Press.

Vinner, S. (1983), "Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14, pp. 293-305.

DATOS DE LA AUTORA

Gregoria Guillén Soler
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
Gregoria.Guillen@uv.es

La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación

María Mercedes García Blanco

Resumen: En las últimas décadas, la formación de profesores, y concretamente de profesores de matemáticas, ha sido objeto de estudio para profesionales de diversos campos, entre ellos el de la didáctica de las matemáticas. Las perspectivas teóricas, así como las aportaciones para la consecución del objetivo global, proporcionar una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza de las matemáticas, toman distintas formas. En este trabajo, miramos brevemente algunas de esas aportaciones y comentamos nuestra propuesta, la cual conlleva una manera de entender el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas y una manera de hacer operativas esas ideas teóricas en un contexto concreto, como es la formación de maestros.

Palabras clave: formación de profesores de matemáticas, aprender a enseñar, perspectiva situada.

Abstract: In the last decades, teacher education and, in particular, mathematics teacher education has been an object of study for researchers from diverse fields, among them the didactic of mathematics. The theoretical perspectives as well as the contributions for reaching the global objective, to provide a complete and suitable formation to future professionals of the mathematics education, have adopted very different forms. In this work, I comment briefly some of those contributions and I expose my proposal. This proposal entails a way of understanding the process to get to be a mathematics teacher and a way to make operative those theoretical ideas in a specific context: primary mathematics teacher education.

Keywords: mathematics teacher education, learning to teach, situated perspective.

Fecha de recepción: agosto de 2004.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la preocupación por la educación ha propiciado cambios y reformas que han influido y están influyendo en todos los elementos que forman el sistema educativo. El profesor, como uno de esos elementos, se constituye en centro de interés y preocupación. Así, desde distintas perspectivas y en diferentes países, la formación de profesores en general, y de matemáticas en particular, ha sido objeto de estudio para profesionales de muy diversos ámbitos (investigadores, formadores de profesores, profesionales de la enseñanza), desde campos diversos y generales (psicología, pedagogía, educación), o más específicos (didáctica de las matemáticas, de las ciencias experimentales, sociales, etc.). Aunque una de las ideas que guía a todos los que estamos inmersos en esta problemática es posibilitar una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza, los puntos de partida, así como las aportaciones para la consecución de esta idea global, toman distintas formas. En este trabajo, miraremos brevemente algunas de esas aportaciones y fundamentaremos teóricamente nuestra propuesta, realizada a partir de unos principios teóricos que asumimos y comentamos.

APROXIMACIONES TEÓRICAS SOBRE APRENDER A ENSEÑAR E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Centrándonos en el campo de la investigación en educación matemática, en este trabajo comentaremos dos aproximaciones al proceso de generar el conocimiento necesario para ser competente en la profesión de profesor. La primera de ellas proviene de Goffree y Oonk que, partiendo del estudio de la práctica y reflexionando sobre ella, nos proporcionan un modelo teórico de formación de profesores. En segundo lugar, en Simon, el interés teórico que sustenta sus investigaciones en formación de profesores va al unísono con su interés práctico, lo que hace que podamos decir que el punto de partida de ellas sea el binomio teoría-práctica. Comentaremos brevemente cada uno de estos modelos.

El análisis de la práctica docente como referente

Goffree y Oonk (1999) nos presentan un modelo para la formación de profesores de matemáticas de primaria, basado en la aproximación fenomenológica a las estructuras matemáticas de Freudenthal, propuesto y desarrollado en la década de 1980. En este modelo de formación de profesores de matemáticas se defiende la idea de que, en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor, intervienen los procesos que este autor denomina *matematización* y *didactización*. Los estudiantes para profesor realizan actividades matemáticas en el nivel de sus alumnos potenciales, reflexionando y discutiendo en pequeños grupos los resultados de las tareas desde la perspectiva del aprendizaje de los alumnos. Según Goffree y Oonk, las reflexiones sobre los procesos de aprendizaje de los niños, combinadas con las experiencias que los estudiantes para profesor han tenido con su propio aprendizaje de las matemáticas, contribuyen a crear un conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas en primaria. Todo este camino puede recorrerse ayudado por ideas de las teorías de pedagogía y matemáticas. Según este modelo, el estudiante para profesor de matemáticas se encuentra inmerso en un proceso cíclico de actividades (resolución de problemas matemáticos, actividades de matematización, reflexión sobre la actividad desarrollada y sobre métodos de enseñanza). Durante este proceso el estudiante para profesor trabaja con niños y estudia sus procesos de aprendizaje, aunque refiriéndose a sus propios procesos de aprendizaje. El modelo propuesto por estos investigadores ha ido evolucionando a través del tiempo y en coherencia con sus estudios. En la propuesta de 1999 se consideran algunas actividades (reflexionar, leer, escribir matemáticas), contextos (situaciones pedagógicas), contenidos (tópicos desde la psicología y pedagogía), y referencias cognitivas (conocimientos previos) y de saber hacer (destrezas previas). En este modelo, los estudiantes para profesor "vuelven a la clase", ya que las observaciones de clase del propio estudiante para profesor constituyen el punto de partida para el análisis, reflexión y discusión, y también forman la base para sus propios cuestionamientos sobre la enseñanza (Goffree y Oonk, 1999).

Los ciclos recursivos

Desde otra perspectiva, considerando el aprendizaje desde el punto de vista del constructivismo social e incorporando aspectos de la teoría didáctica francesa (Brouseau, 1986, citado en Simon, 1994), Simon nos presenta una estructura cíclica basada en un marco para aprender matemáticas en el que se usa la estructura organizativa "Karplus Learning Cycle" (Karplus *et al.*, 1977, citado en Simon, 1994). El modelo presentado se configura a través de seis ciclos recursivos, donde cada uno contiene al anterior, estructurados de manera análoga al primer ciclo que sirve de punto de partida. El primer ciclo se denomina "aprendiendo matemáticas", y las actividades que lo configuran son: "exploración de situaciones matemáticas", "identificación de conceptos" y "aplicación". Los sucesivos ciclos se denominan: "desarrollando conocimiento sobre matemáticas", "desarrollando teorías de aprendizaje matemático", "comprendiendo el aprendizaje de los estudiantes", "planificando la enseñanza" y "enseñanza". Este modelo describe las interconexiones entre diferentes dominios de conocimiento del profesor y además puede ser usado para pensar sobre el contenido y organización de una particular lección o de un curso de un programa de formación. Sin embargo, hay que reseñar que se organiza dando cuenta de las actividades por desarrollar por los estudiantes para profesor y su secuenciación, mostrando cierta tendencia a la aplicación de la teoría a la práctica de enseñar y entendiendo que el objetivo final es desarrollar la competencia (conocimiento y destrezas) para enseñar matemáticas. En este modelo se muestra una manera de trabajar en las clases: los estudiantes para profesor trabajarían en grupos explorando una situación problemática, en un segundo momento la discusión favorece la identificación del concepto, para llegar en la siguiente fase a la aplicación y extensión de nuevas ideas. Estas ideas pueden derivarse espontáneamente durante la discusión de la clase o pueden ser propiciadas por un nuevo problema propuesto por el formador de profesores.

A través de estos modelos para la formación de profesores, hemos querido mostrar diversas diferencias y semejanzas en las respuestas a una demanda social y profesional, y cómo se puede abordar desde distintas posiciones. Sin embargo, las maneras de entender la forma en la que los estudiantes para profesor parecen construir el conocimiento necesario para enseñar que se han descrito no consideran las formas de participar en una comunidad como elementos característicos del aprendizaje. En los apartados siguientes, trataremos de describir una manera de entender el aprendizaje del estudiante para profesor-profesor, incorporando estas nuevas ideas y las implicaciones que pensamos se deducen para la formación de estudiantes para profesores de matemáticas que complementa algunas de las aportaciones realizadas por los modelos anteriores.

EL APRENDIZAJE DEL PROFESOR DESDE LA NATURALEZA SITUADA DE LA COGNICIÓN

El problema que nos planteamos puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos caracterizar los procesos por los que un estudiante para profesor-profesor construye el conocimiento necesario para enseñar? Desde nuestro punto de vista, las actuales teorías de la cognición y el aprendizaje han propiciado una serie de principios respecto al conocimiento que son fundamentales para ver y analizar el aprendizaje y la formación de profesores (Putnam y Borko, 1997). Entre ellos destacaremos: la naturaleza constructiva del conocimiento y las creencias, la naturaleza social de la cognición, la naturaleza distribuida de la cognición, y la naturaleza situada de la cognición. La aplicación de estas ideas al aprendizaje del profesor-estudiante para profesor de matemáticas y su implicación en su proceso de formación nos hacen subrayar:

1. El carácter constructivo de la generación del conocimiento. Nos parece indiscutible el papel fundamental que desempeñan el conocimiento y las creencias previas en el aprendizaje de las personas. El aprendizaje puede entenderse como un proceso en el que el futuro profesor interpreta experiencias a través de las estructuras conceptuales que tiene, para ampliar y modificar su conocimiento.
2. El aprendizaje tiene una componente social importante. Se asume que el conocimiento se produce a través de la interacción de las personas y grupos de personas.
3. El carácter situado del conocimiento. Se subraya la importancia de los contextos y del tipo de actividades en la generación del conocimiento, así como del conocimiento que poseen los profesores y las situaciones en las que se adquiere y usa, y se asume que el conocimiento es inseparable de los contextos y las actividades en los que se desarrolla. Por lo cual, podemos afirmar que el contexto donde una actividad se realiza es una parte integral de la actividad y ésta es una parte integral del aprendizaje que tiene lugar.

La noción de “actividad auténtica”

La idea que nosotros consideramos clave es que el conocimiento necesario para enseñar debería ser aprendido en contextos que sean “significativos” para el estudiante para profesor, mediante un proceso por el que adquiere un conocimiento y una manera de razonar como un experto. En este sentido, adquiere importancia el constructo "actividad auténtica", entendido como: "Las actividades auténticas se definen sencillamente como las prácticas ordinarias de la cultura" (Brown, Collins y Duguid, 1989, p. 34). La cuestión que surge en relación con la formación de profesores de matemáticas (Llinares, 1994, 1999) es que esas "prácticas ordinarias" están explicitadas en los documentos oficiales, pero rara vez se dan en las clases, por lo que los programas de formación deben proporcionar los elementos, medios y situaciones para que se puedan generar esas nuevas prácticas, deben propiciar la creación de "entornos de aprendizaje", considerados como "pequeños entornos conceptuales, construidos deliberadamente y desarrollados para resolver tipos de problemas específicos" (Greeno, 1991). Estos entornos deberán posibilitar el trabajo con una serie de aspectos que mejoren la exploración de problemas profesionales por parte del futuro profesor.

El aprendizaje como práctica social

Considerar el aprendizaje como un aspecto inseparable e integral de la práctica social y entenderlo como una actividad situada ha llevado a investigadores como Lave y Wenger (1991) a utilizar y definir un proceso que denominan "participación periférica legítima". Como Hanks nos dice en el prólogo de dicho libro: "Este concepto central [participación periférica legítima] denota un modo particular de comprometerse un aprendiz, que participa en la práctica actual de un experto, pero sólo en un grado limitado y con una responsabilidad limitada, en el resultado último como un todo" (Hanks, en Lave y Wenger, 1991, p. 14). El aprendizaje se entiende como "participación periférica legítima" en comunidades de práctica; con ello se quiere recoger la idea de que los aprendices participan en comunidades de profesionales, pero sin tener toda la responsabilidad. A través de esa participación irán desarrollando los conocimientos y destrezas que se necesitan para poder llegar a ser un participante pleno en las prácticas socioculturales de la comunidad. Por "comunidad de práctica" se caracteriza a un grupo social en el que los miembros comparten una determinada actividad, pero los componentes de la comunidad tienen formas de participación diversas, complejas y en distintos niveles, por lo que no se puede hablar de una adquisición lineal de conocimientos y destrezas para pertenecer a dicha comunidad.

Las ideas anteriores son importantes para entender el aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas. Estos estudiantes deben llegar a ser participantes plenos de una comunidad de práctica formada por los profesores (del nivel que se considere) con la tarea de enseñar matemáticas a grupos de alumnos. Esta actividad de enseñar es lo que caracteriza a esta comunidad. Los conocimientos y destrezas necesarios deben ser desarrollados por los recién llegados a la comunidad. Este proceso de llegar a ser miembro de dicha comunidad se genera a través de la actividad, participando de manera gradual, diversa y progresiva en distintas tareas que caracterizan la práctica de enseñar matemáticas. Los estudiantes para profesor de matemáticas no pertenecen a esa comunidad, pero los programas de formación de profesores desde la didáctica de las matemáticas deben crear los medios para darles la oportunidad de integrarse en la comunidad de la "práctica de enseñar matemáticas". La manera de hacer operativa esta idea es lo que se denomina "ciclos de reproducción" (véase figura 1). En definitiva, desde la perspectiva de la cognición situada y asumiendo los aspectos que hemos ido destacando sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas, los formadores de profesores debemos determinar la clase de conocimiento, destrezas, y comprensiones que capaciten al futuro profesor para enseñar, e identificar experiencias que posibiliten su aprendizaje.

Para nosotros, las ideas comentadas, tanto respecto al conocimiento del profesor como al proceso de aprendizaje, son el fundamento de nuestra propuesta.

UNA PROPUESTA DE CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS

La idea del conocimiento del profesor como situado y del proceso de aprendizaje del profesor de matemáticas como "participación periférica legítima" en una comunidad de práctica tiene implicaciones en el contenido del programa de formación y en la forma en que se dará el proceso de aprendizaje del futuro profesor de matemáticas (García, 2003). Los programas de formación inicial de profesores de matemáticas deben posibilitar que los futuros profesores, a través del desarrollo de diferentes formas de participar en la comunidad de práctica que constituye el "ser profesor de matemáticas", mejoren y amplíen su comprensión de las nociones y representaciones matemáticas, desarrollen comportamientos específicos, y destrezas de razonamiento pedagógico y metacognición (Llinares, 1999). Para ello, los entornos de aprendizaje en los programas de formación (García, 2000) deben ayudar a los estudiantes a: cuestionar sus creencias previas, ampliar su comprensión de las nociones matemáticas escolares, desarrollar conocimiento de contenido pedagógico ligado a las nociones matemáticas escolares, generar destrezas cognitivas y procesos de razonamiento pedagógico, e incrementar los procesos de reflexión. Llinares (1994), apoyándose en la caracterización de diferentes dominios de conocimiento necesario para enseñar (conocimiento de matemáticas, conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas, conocimiento del proceso instructivo), señala que la cuestión de cómo se genera el conocimiento necesario para enseñar y cómo se desarrollan las diferentes formas de participar está influida por la manera en que el profesor utiliza el conocimiento y las creencias y participa en los entornos de aprendizaje. La caracterización se dificulta por la compleja trama de creencias, conocimiento y actitudes sobre las que el estudiante para profesor genera sus formas de participar (Llinares, 2002).

Aprender a enseñar como el desarrollo de formas de participar en una comunidad

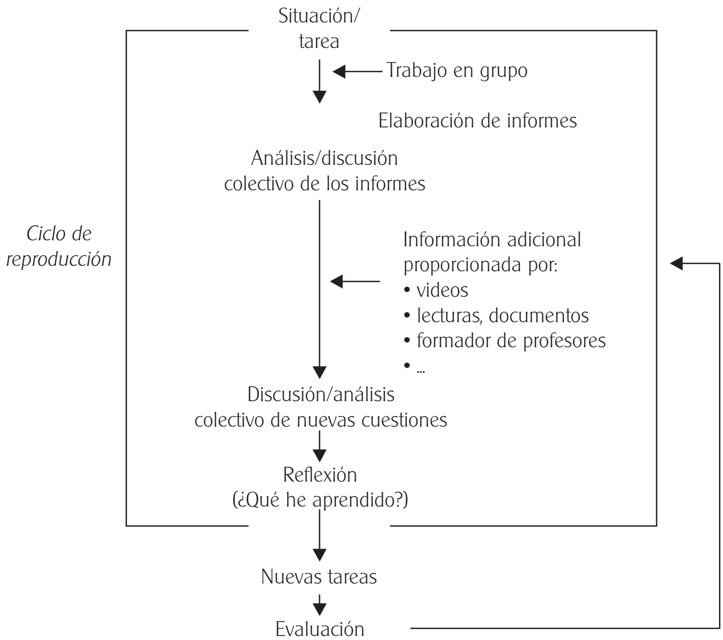
Como hemos comentado antes, el proceso de aprender a enseñar matemáticas puede ser considerado como un proceso de aprendizaje contextualizado, en el cual se pretende que el estudiante para profesor contemple, en todos los niveles, los nuevos procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto nos hace pensar en los entornos de aprendizaje con una serie de características básicas (García, 2000): generadores de destrezas reflexivas, motivadores de la interacción social y la idea de "actividad" como articuladora del proceso. La "actividad" pasa a ser el centro del proceso de aprendizaje. Actividad como conjunto de procesos vinculados a una situación problemática o tarea y que genera conocimiento, y no sólo considerados como procesos cognitivos individuales, sino también contemplando su aspecto social, al originarse cuando un grupo intenta resolver una tarea. El conjunto de relaciones que deben considerarse en el proceso de generación del conocimiento práctico personal del futuro profesor pone de manifiesto ciertas ideas respecto al conocimiento del profesor: su naturaleza integrada, su continuo desarrollo como resultado de su uso en tareas nuevas, y el aprendizaje continuo, que es la formación de profesores que va más allá de la formación inicial (Llinares, 1994).

Es importante subrayar que, si queremos capacitar a los estudiantes para profesor de matemáticas para definir y explorar problemas pedagógicos y usando múltiples fuentes de información, será necesario un conjunto variado y amplio de dichas fuentes que se adecue a los objetivos pretendidos. Dos puntos de vista deben articular las decisiones tomadas en cuanto a las "actividades auténticas" utilizadas en la formación de profesores de matemáticas a través de las que se creen los entornos de aprendizaje: la relación tarea-actividad, procedente de las reflexiones sobre la cognición situada y la participación periférica legítima, y la noción de reflexión desde la perspectiva del estudiante para profesor, considerado como individuo reflexivo, lo que le permite construir su conocimiento a través de la reflexión sobre la acción. Además, hay que tener en cuenta que la toma de decisiones instruccionales (la realización de tareas profesionales) del futuro profesor debe venir facilitada por el conocimiento: de los aprendices, de las características del proceso de aprendizaje, de los medios instruccionales, del contenido matemático, curricular, y del proceso de razonamiento pedagógico, etc. (García y Sánchez, 2002). Todas las ideas y aspectos comentados deben hacerse operativos en contextos concretos; se abren, por tanto, nuevas perspectivas y líneas de investigación. En este sentido, trabaja nuestro grupo de investigación desde hace algunos años, en el contexto de la formación inicial de maestros (García *et al.*, 1993, 1994; García, 2000; García y Llinares, 2001).

LAS NOCIONES DE "CICLOS DE REPRODUCCIÓN" E "ITINERARIOS DE FORMACIÓN" COMO INSTRUMENTOS DEL FORMADOR DE PROFESORES

En nuestra acción como formador de maestros, usamos las ideas de "ciclos de reproducción" e "itinerarios de formación" como medios de articular y llevar a la práctica las implicaciones derivadas de considerar el aprender a enseñar como una "práctica social" y, por tanto, como el "desarrollo de las formas de participar en una comunidad" (Llinares, 2002). Un ejemplo esquematizado de estos itinerarios sería el mostrado en la figura 1 (García, 2000), donde puede observarse la manera de llevar a la práctica de formar profesores la idea teórica de "ciclo de reproducción". En estos itinerarios, la tarea/situación de partida puede tomar formas muy diferentes. Algunas de ellas ya han sido utilizadas anteriormente como estrategias metodológicas, pero en nuestro caso su uso se amplía, incorporando nuevas posibilidades. Los estudios de caso, protocolos, entrevistas clínicas, problemas matemáticos, "teaching portfolios", situaciones de microenseñanza, entre otros, pueden servir de base para posibilitar la creación de entornos de aprendizaje en los programas de formación con el objetivo de favorecer la construcción de conocimiento y el desarrollo de la "participación periférica legítima".

Figura 1 Esquema de un itinerario de formación



Fuente: García, 2000, p. 63.

La resolución de *problemas matemáticos* puede permitir el análisis, crítica y cambio de concepciones, si fuese necesario, así como ampliar la comprensión de las matemáticas de los estudiantes para profesores (García *et al.*, 1993, 1994; García, 2000; García y Sánchez, 2002). *La entrevista clínica* ha sido considerada como una "conversación profesional", es decir, dirigida hacia un propósito definido, más allá de la propia conversación. En función de la información deseada, puede servir para una gran variedad de propósitos y adoptar muy distintos formatos. Actualmente su uso se ha generalizado dentro del campo educativo (Heid *et al.*, 1999) y, en nuestro contexto de formación de profesores, pueden ser generadoras de entornos de aprendizaje con muy distintos objetivos. *Los materiales de protocolo* pueden entenderse como grabaciones realizadas en vídeo o audio que recogen y presentan segmentos de la realidad y ofrecen información que puede ayudar a los profesores a tomar decisiones y, mediante su análisis, ayudar a los estudiantes para profesor en su formación. El análisis de protocolos puede ser una estrategia adecuada para estudiar las interacciones que se producen entre profesor y alumno/alumnos, entre alumnos, o entre el contenido matemático y el alumno, en la realización de determinadas tareas matemáticas. *Los casos* pueden situarse como una de las diferentes presentaciones que puede tomar la simulación, enmarcándolos dentro de las que se pueden considerar como poco estructuradas. Los casos presentan ejemplos, escenarios, viñetas, etc., de situaciones reales de enseñanza-aprendizaje que pueden ser analizadas desde diferentes perspectivas y niveles cognitivos por sujetos, tanto en el periodo de formación inicial como en permanente (Shulman, 1992). En educación, y más concretamente en didáctica de las matemáticas, existe un amplio cuerpo de conocimiento que puede ser sistematizado mediante casos, sin que se pueda presuponer que los principios didácticos que en ellos se discutan puedan ser susceptibles de generalización. Un "teaching portfolio", incorporado como un medio para la formación de profesores por Shulman (Shulman, 1993), está formado por "entradas", que pueden ser materiales de enseñanza, copias de lecciones, videos de clase, proyectos de unidades, exámenes, copias de los cuadernos de notas de los estudiantes, etc.; las entradas pueden terminar con algunos comentarios breves reflexivos del profesor, analizando la unidad o las notas de un compañero o tutor respecto a éstas. Proporcionan situaciones a partir de las cuales se pueden desarrollar entornos de aprendizaje que posibiliten la construcción de conocimiento en relación con los distintos aspectos que caracterizan la labor de un profesional de la enseñanza de las matemáticas, generando formas de participar en la comunidad de ser un profesor. *Las situaciones de microenseñanza*, en las que el estudiante para profesor estructura, planifica, lleva a la práctica con un grupo de niños y reflexiona sobre una secuencia de enseñanza concreta, también parecen un tipo de tarea importante para la formación de maestros. Éstas proporcionan al estudiante la posibilidad de centrarse sólo en su aprendizaje, ya que la situación es menos compleja que la que se produce con la clase entera. El alumno debe concretar contenidos, objetivos, metodología, seleccionar materiales curriculares, etc. Las grabaciones en audio o vídeo, y su análisis posterior, pueden favorecer una reflexión sobre la propia actuación.

Una vez diseñada la tarea/situación, tomando cualquiera de las formas anteriores u otras según el objetivo pretendido, se plantea a los distintos grupos en los que está organizado el aula. A partir de las tareas y los procesos de resolución, se formulan una serie de cuestiones que definen distintos espacios de problemas para reflexión y análisis del estudiante para profesor. La intención de las cuestiones es hacer explícito, mediante la discusión en grupos, las creencias y el conocimiento que los alumnos tienen respecto a una serie de aspectos y generar la necesidad de introducir información teórica respecto a diferentes temas, información que se proporciona a través de lecturas, videos y el propio formador de profesores. La manera en la que conocimiento y creencias se articulan, caracterizando las diferentes formas de participar que se generan, ha sido analizada en Llinares (2002), donde se muestra el potencial de este tipo de "prácticas" desde la perspectiva del aprender a enseñar como una "práctica social" vista a través del desarrollo de diferentes formas de participar y como elemento constitutivo de la participación periférica legitima. La información teórica proporcionada será la base para una visión nueva y más completa del caso, protocolo, entrevista clínica, etc., presentado. Los distintos grupos hacen un nuevo informe ampliado con un análisis de su propio aprendizaje, los estudiantes deben reflexionar, analizar e informar sobre lo aprendido, así como sobre sus viejas y nuevas concepciones. En función de cómo se haya desarrollado el proceso, se incorporarán unas tareas complementarias, que cumplirían dos objetivos: generar conocimiento práctico personal y posibilitar la recopilación de información para la evaluación. Este proceso será completado con otros medios o instrumentos que permitan recoger datos con los cuales realizar la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para finalizar, queremos destacar que lo que hemos querido mostrar a través de estas páginas es una manera de hacer efectiva la relación e interacción entre teoría y práctica, entre una manera de entender el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas, que conlleva unos presupuestos teóricos que asumimos como investigadora, y una manera de hacer operativas esas ideas teóricas en un contexto concreto, la formación de maestros (García *et al.*, 2003). Esta realidad plantea constantemente preguntas que permiten y obligan a seguir avanzando en ambos sentidos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, J., A. Collins y P. Duguid (1989), "Situation Cognition and the Culture of Learning", *Educational Researcher,* enero-febrero, pp. 32-42.

García Blanco, M. M. (2000), "El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: implicaciones para la formación inicial de maestros", en C. Corral y E. Zurbano (eds.), *Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación inicial de los profesores del área de didáctica de la matemática,* Oviedo, Universidad de Oviedo, pp. 55-79.

García Blanco, M. M. (2003), "A formaçao inicial de professores de matemática: Fundamentos para a definiçao de um currículo", en D. Fiorentini (ed.), *Formaçao de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*, Campinas, Mercado de Letras, pp. 51-86.

García, M., I. Escudero, S. Llinares y V. Sánchez (1993), "Learning Mathematics for Learning to Teach: Analysis of an Experience", ponencia presentada en el XVII PME, Tsukuba, Japón.

—— (1994), "Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de primaria", *Epsilon*, núm. 30, pp. 11-26.

García, M. y S. Llinares (2001), "Los procesos matemáticos como contenido: el caso de la prueba matemática", en E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, Madrid, Síntesis, pp. 105-122.

García, M. y V. Sánchez (2002), "Una propuesta de formación de maestros desde la Educación Matemática: adoptando una perspectiva situada", en L. Contreras y L. Blanco (Coords.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente*, Cáceres, Universidad de Extremadura, Servicio de publicaciones, pp. 59-91.

García, M., V. Sánchez, I. Escudero y S. Llinares (2003), *The Dialectic Relationship between Theory and Practice in Mathematics Teacher Education*, Research Report, Italia, CERME 3.

Goffree, F. y W. Oonk (1999), "Educating Primary School Mathematics Teachers in the Netherlands: Back to the Classroom", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 2, pp. 207-214.

Greeno, J. (1991), "Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, núm. 3, pp. 170-218.

Heid, K., G: Blume, R. Zbiek y B. Edwards (1999), "Factors that Influence Teachers Learning to do Interviews to Understand Students' Mathematical Understandings", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 37, pp. 223-249.

Lave, J. y E. Wenger (1991), *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*, Nueva York, Cambridge University Press.

Llinares, S. (1994), "El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional", en L. Santaló *et al.* (eds.), *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*, Madrid, Rialp, pp. 296-337.

—— (1999), "Preservice Elementary Teachers and Learning to Teach Mathematics", en N. Ellerton (ed.), *Mathematics Teacher Development: International Perspectives*, Perth, Meridian Press, pp. 107-119.

—— (2002), "Participation and Reification in Learning to Teach. The Role of

Knowledge and Beliefs", en G.C. Leder *et al.* (eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Dordrecht, Kluwer Academic.

Putman, R. y H. Borko (1997), "Teacher Learning: Implications of New Views of Cognition", en B. Biddle *et al.* (eds.), *International Handbook of Teachers and Teaching*, Países Bajos, Kluwer Academic.

Simon, M. (1994), "Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 26, pp. 71-94.

Shulman, J.H. (ed.) (1992), *Case Methods in Teacher Education*, Nueva York, Teachers College Press.

Shulman, L. (1993), "Renewing the Pedagogy of Teacher Educator: The Impact of Subject-Specific Conceptions of Teaching", en L. Monetro y J. Vez (eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*, Madrid, Síntesis.

DATOS DE LA AUTORA

María Mercedes García Blanco
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla, España
mgblanco@us.es

Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas, de Antoni Vila Corts y Ma. Luz Callejo de la Vega

Reseñado por Moisés Martín García González

El objetivo central de esta obra es presentar una propuesta de intervención educativa dirigida a la modificación de lo que los autores llaman "el sistema de creencias del alumnado".

Este sistema de creencias, nos explican en uno de los capítulos del libro, tiene una estructura compleja, cuyas características principales se enumeran a continuación:

- Las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo que se mantiene con diversos grados de convicción (las que se sostienen con más fuerza son centrales y las demás periféricas) y de conciencia.
- Las creencias de un sujeto no están aisladas unas de otras, sino que se relacionan formando un sistema. Algunas se relacionan entre sí a modo de premisa y conclusión (por lo que son llamadas *primarias* y *derivadas*) de manera cuasilógica. Se agrupan en *clusters* o racimos, más o menos aislados e interrelacionados unos con otros.
- Se distinguen de las concepciones por su contenido: mientras que las concepciones se refieren a las ideas asociadas a conceptos matemáticos concretos, las creencias se refieren a las ideas asociadas a:
    - Actividades y procesos matemáticos
    - La manera de concebir el quehacer matemático
    - Los sujetos que ejercen la actividad matemática
    - La enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia
- Tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo, y están ligadas a situaciones o contextos concretos.
- Su origen puede residir en la experiencia, en la observación directa, o en determinadas informaciones; a veces unas creencias son inferidas de otras.
- La estructura de los sistemas de creencias da lugar a diversos grados de consistencia y de estabilidad, lo que permite explicar comportamientos y prácticas contradictorios, así como las resistencias al cambio.

Interesa a los autores sobre todo entender el binomio creencias-prácticas: las creencias y las prácticas forman un círculo que a veces es difícil de romper; las creencias de un individuo regulan su estructura de conocimiento, afectan a sus prácticas y a su pensamiento y actúan a veces como una fuerza inercial al cambio; a su vez, las prácticas configuran, modifican o consolidan sus creencias.

Debido al carácter complejo del sistema, el papel que desempeñan estas creencias sobre la conducta en el proceso de resolución de problemas no es una relación causa-efecto claramente delimitada, ni se produce en forma de influencias de creencias concretas más o menos separadamente.

Según los autores, la importancia de la modificación del sistema de creencias del alumno reside en el papel regulador de éste en las conductas y maneras de proceder del alumno, cuando resuelve problemas, y en su influencia sobre los distintos aspectos que inciden en la eficacia resolutoria.

Advierten que la compleja estructura del sistema de creencias de un individuo, con las complejas interrelaciones que se producen, cumple un papel inercial, contrarrestando esfuerzos puntuales, por fuertes e intensivos que fueran, si están centrados en la intervención sobre creencias concretas. Así, la propuesta de intervención para la modificación de creencias debe ser global, constante y de largo plazo.

En otro capítulo del libro, los autores analizan estas creencias; las relaciones entre las acciones llevadas a cabo en el abordaje de problemas no estereotipados y los sistemas de creencias sobre la base de casos concretos, las creencias adecuadas para resolver problemas, así como el papel que desempeñan algunos agentes en el origen y formación de las creencias, a saber, la cultura escolar, las tareas escolares y el papel del profesor.

A lo largo del libro se resalta la incidencia que tiene este último agente en la creación y modificación del sistema de creencias del alumno.

Para los autores, los sistemas de creencias del profesorado, respecto a lo que son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deben enseñar, enmarcan a su vez el sistema de creencias sobre el papel que deben desempeñar los problemas en el proceso de educación matemática y, por tanto, el modelo de intervención en el aula. Como lo sugiere el título de la obra, el papel otorgado a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas se constituye en el eje del análisis realizado.

Así, los autores proponen dos modelos de trabajo en el aula parcialmente antagónicos y que dan, cada uno de ellos, un papel muy distinto a la resolución de problemas, como los definitorios de un continuo que abarca una amplia gama tanto de sistemas de creencias como de sus correspondientes modelos de intervención.

En un extremo, se sitúan los sistemas de creencias del profesorado, los cuales tienden a considerar el problema como subsidiario de los contenidos matemáticos, otorgándole una finalidad acreditativa (como herramienta para controlar el nivel de aprendizaje de conocimientos matemáticos) y una finalidad ilustrativa (como herramienta para ilustrar, más que aplicar, los distintos conocimientos que se van introduciendo). Estos sistemas de creencias se relacionarían, según los autores, con modelos de trabajo que tienen en común la característica de "reducir los problemas a no problemas" y se relacionan a su vez con la visión de enseñar las matemáticas que pone el centro de atención en los contenidos matemáticos, destacando su aplicación.

En el otro extremo, se sitúan los sistemas de creencias del profesorado que suelen considerar el problema como una herramienta didáctica para favorecer el pensamiento matemático. Estos sistemas se relacionan con modelos de trabajo que consideran "la resolución de problemas tanto un objeto como un instrumento de aprendizaje".

En cada uno de estos modelos se privilegian determinadas actividades, que inciden más específicamente en el propósito que persigue el profesorado.

Por otra parte, se nos advierte sobre la frecuente convivencia, pero a la vez, sobre la clara separación de estos dos modelos, fenómeno ligado a sistemas dualistas en los que incluso se han identificado sistemas de creencias que consideran simplemente anecdótico e irrelevante el trabajo de tipo investigativo (el cual es una de las características del segundo modelo).

Cabe suponer, entonces, que para los autores, dada la dialéctica planteada entre creencias y prácticas, tratar de moverse de manera continua y en el largo plazo en el segundo modelo traería como consecuencia la modificación paulatina del sistema de creencias de los alumnos.

Esto supondría que las creencias de los alumnos serían inadecuadas antes de la intervención.

Al respecto, los autores detallan, en otro capítulo, el proceso general de evaluación necesariamente ligado a esta intervención y cuyas características fundamentales serían un planteamiento global (no compartimentado) a partir de metodologías e instrumentos complejos (de naturaleza diversa y no tradicional).

El propósito de esta evaluación sería la "interiorización de creencias adecuadas". Según los autores, se debe ser consciente tanto del alcance como de las limitaciones de este propósito en cuanto a qué es posible evaluar, cómo, quiénes y por qué.

Así, llegamos a la última parte de la obra, donde se desarrolla el objetivo central: presentar una propuesta de intervención educativa dirigida a la modificación del sistema de creencias del alumnado.

El capítulo se divide según los objetos o escenarios sobre los cuales se centra la intervención educativa y son tres:

- La resolución de "un" problema. Aquí se distinguen, a su vez, tres aspectos considerados como importantes en el proceso de formación de las creencias: las características de los problemas, la organización de la tarea y el papel del profesorado.
- La resolución de problemas en el currículo. Se analiza el papel de la resolución de problemas en el currículo desde dos ángulos: las influencias que deben ser evitadas y las propuestas que deben ser desarrolladas.
- La planeación general del currículo en secundaria. Se toman como referencia para el análisis planteamientos elaborados por organizaciones como la OCDE en su proyecto PISA, o los hechos por el NCTM en sus "Principios y estándares para la matemática escolar".

Finalmente, respecto a lo que los autores consideran el "quehacer" matemático, es posible afirmar que para ellos:

- La resolución de problemas es el corazón mismo de la matemática.

- A través del enfrentamiento con situaciones problemáticas, se puede hacer de los procesos de pensamiento, objeto de aprendizaje.
- Pensar matemáticamente consiste en modelar, simbolizar, abstraer y aplicar ideas matemáticas a una amplia gama de situaciones, gracias a la disponibilidad de herramientas matemáticas que permitan abordarlas con éxito.
- Un alumno tiene conocimientos matemáticos cuando es capaz de utilizarlos para resolver ciertos problemas, que tienen o no indicadores en su formulación, y también cuando es capaz de adaptar estos conocimientos en aquellas condiciones que no son las habituales para interpretar los problemas o plantear cuestiones a propósito de ellas.

Por otra parte, los autores afirman que, detrás de estos planteamientos, específicamente sobre la resolución de problemas como instrumento o herramienta de aprendizaje, está la concepción constructivista del aprendizaje, según la cual el conocimiento no se recibe pasivamente como si la mente fuese un libro en blanco donde se van escribiendo los nuevos conocimientos, sino que el sujeto construye activamente el conocimiento, incorporando lo nuevo a las estructuras mentales que su experiencia ha ido forjando.

Esto significa que la matemática no se aprende por transmisión directa de lo que se explica en clase o de lo que se lee en los libros de texto, sino que se aprende en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante una serie determinada de acciones.

DATOS DEL LIBRO

Antoni Vila Corts y Ma. Luz Callejo de la Vega (2004)
Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas, Madrid, NARCEA, 220 p.

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Buscar una comprensión profunda de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
    1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    1.3. Saber matemático
        1.3.1. Aritmética
        13.2. Geometría
        1.3.3. Probabilidad y estadística
        13.4. Preálgebra y álgebra
        1.3.5. Trigonometría
    1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    1.6. Uso de la tecnología
    1.7. Interacciones en el aula
    1.8. Evaluación
    1.9. Enseñanza experimental
    1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
    2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    2.3. Saber matemático
        2.3.1. Álgebra
        2.3.2. Geometría
        2.3.3. Probabilidad y estadística
        2.3.4. Cálculo
        2.3.5. Razonamiento matemático
    2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    2.6. Uso de la tecnología
    2.7. Interacción en el aula
    2.8. Evaluación
    2.9. Enseñanza experimental
3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
    3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    3.3. Saber matemático
        3.3.1. Álgebra lineal
        3.3.2. Geometría

        3.3.3. Probabilidad y estadística
        3.3.4. Cálculo de una o varias variables
        3.3.5. Análisis
        3.3.6. Ecuaciones diferenciales
        3.3.7. Variable compleja
    3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    3.6. Uso de la tecnología
    3.7. Interacciones en el aula
    3.8. Diagnósticos y evaluación
    3.9. Enseñanza experimental
4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
    4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
    4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
    4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
    5.1. Políticas
    5.2. Instituciones
    5.3. Asociaciones
    5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
    6.1. Teorías y marcos referenciales
    6.2. Métodos de investigación
    6.3. Validación
    6.4. Instituciones y organizaciones
    6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos sobre estos temas que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

GUÍA PARA AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones en español.

- Todos los escritos que se reciben son arbitrados. El Comité Editorial se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El contenido del artículo es responsabilidad del autor.
- El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título cuando lo considere conveniente, previa consulta al autor.
- El Comité Editorial y Editorial Santillana tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual al autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* como la que se podrá encontrar en la página www.santillana.com.mx/educacionmatematica.

PREPARACIÓN DEL ESCRITO

El escrito:

- Deberá estar preparado electrónicamente, en Microsoft Word o algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 30 cuartillas (alrededor de 10 000 palabras) incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Deberá incluir también un resumen en español de entre 100 y 150 palabras, la versión en inglés o francés del resumen, y un mínimo de 5 palabras clave.
- En archivo aparte, deberá prepararse una *carátula* que contenga: *a)* título y tema central del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse explícitamente si el material ha sido presentado previamente en congresos o publicado en otro idioma); *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, fax y domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo de texto.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean familiares a un lector internacional.

Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, pp. 51-53).

Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo:

Ávila, A. y G. Waldegg (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*, México, INEA.
Block, D. y Martha Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela", *Educación Matemática*, vol. 5, núm. 3, pp. 39-58.
Kaput, J. (1991), "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes", en Von Glaserfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education,* Dordretch, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

Si la lengua materna del autor no es el español, el artículo deberá ser revisado por un experto en redacción y ortografía españolas antes de ser enviado a la revista.

ENVÍO DEL ESCRITO

- Los escritos deberán enviarse a alguna de las siguientes direcciones electrónicas: revedumat@yahoo.com.mx o aliavi@prodigy.net.mx
- En el remoto caso en que el autor no pueda enviar su propuesta vía correo electrónico, podrá hacerlo llegar de manera impresa acompañada de los diskettes respectivos, con las especificaciones arriba señaladas, agregando una impresión por triplicado en la que no aparezcan los datos de los autores, para facilitar el proceso de arbitraje, que es anónimo, a la siguiente dirección postal:

  Revista Educación Matemática
  Atención Patricia Balderas
  Apartado Postal 86-521
  México, D.F., 14391, México

PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna tarda aproximadamente un mes, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de 2 o 3 expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión tarda aproximadamente tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores con nuevo arbitraje, y rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de 3 meses.

Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx/educacion matematica

NOTAS DE CLASE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word o con los mismos lineamientos de presentación que los artículos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

RESEÑAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las 5 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.