# Contenido

## ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN



## NOTAS DE CLASE Y REFLEXIONES

## RESEÑAS

### DE LIBRO



**Dirección editorial:** Clemente Merodio López
**Investigación y desarrollo:** Armando Sánchez Martínez
**Editora responsable:** Alicia Ávila Storer
**Cuidado editorial:** Susana Moreno Parada
**Corrección de estilo:** Ofelia Arruti Hernández
**Diagramación:** Moisés Arroyo Hernández
**Fotomecánica electrónica:** Gabriel Miranda Barrón



Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo:
04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Suscripción y ventas: Laura Hernández
Avenida Universidad 767, México, D.F., 03100
Tel. 52 + (55) 5420-7530, ext. 2463
gabih@santillana.com.mx

www.santillana.com.mx

Fecha de edición: diciembre de 2005.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 3012.

Impreso en México/Printed in Mexico.

# Editorial

La demostración y la justificación son características centrales del desarrollo de las matemáticas y, en consecuencia, de su aprendizaje. La demostración en matemáticas es el medio para validar conocimientos nuevos, pero también es el medio a través del cual se producen argumentos para convencer a los expertos de la certeza del conocimiento desarrollado. En el ámbito escolar, la demostración no es sólo un objeto de estudio, también es un medio para aprender. Con la demostración se prueban conjeturas, pero también se dan explicaciones para volver inteligible cierto conocimiento. En la comunidad de investigadores que se ocupan de la problemática relativa a la enseñanza de las matemáticas, existe un considerable interés en estos temas. Numerosas investigaciones realizadas en distintos países han aportado datos que muestran que la mayoría de los estudiantes, de distintos niveles educativos, tienen dificultades para comprender y generar una demostración. Se señala, en particular, que muchas de estas dificultades aparecen entre los futuros profesores de primaria.

Ante todo, hay que considerar que, para entender o generar una demostración, es necesario coordinar distintas competencias, identificar lo que se asume como verdadero, organizar los argumentos lógicos. Para que los alumnos adquieran estas habilidades, es imprescindible la intervención del profesor. Para poder intervenir de una manera apropiada, éste necesita conocer, entre otras cosas, los esquemas de justificación que utilizan los estudiantes. De esto trata el artículo titulado "¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto?", que se publica en este número. Allí el lector encontrará ejemplos de los esquemas de justificación utilizados por alumnos de los grados 5° a 10° cuando se les preguntaba qué habían aprendido recientemente en matemáticas y cómo sabían que eso que les habían enseñado era cierto. El autor proporciona, además, algunas recomendaciones de lo que pueden hacer los maestros para aumentar la habilidad de sus alumnos para mejorar sus justificaciones en matemáticas.

La enseñanza de la demostración puede tener como escenario distintos campos de las matemáticas, en particular la geometría. Sin embargo, según las autoras del artículo titulado "La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?", en este campo la enseñanza de la demostración implica la construcción de un entorno de aprendizaje especial. A partir de esta premisa, se considera que un componente fundamental de este entorno son las tareas que propician el desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental, ligado a la demostración.

En años recientes, a consecuencia del uso cada vez más extendido de las computadoras como herramienta para apoyar la enseñanza de las matemáticas elementales, se están abriendo algunas nuevas posibilidades para ayudar a los alumnos a acercarse a la justificación y a la demostración. Pueden utilizarse distintos paquetes de cómputo para favorecer en los alumnos el desarrollo de habilidades de observación de propiedades, argumentación, justificación y razonamiento. En particular, esto se puede lograr con Cabri Géomètre, como lo muestra el autor del artículo titulado "Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria", en el que se presenta un micromundo desarrollado en Cabri Géomètre para ayudar a los alumnos de secundaria (12 a 15 años de edad) a acercarse a las propiedades de paralelismo y desarrollar justificaciones deductivas en el contexto de la geometría del triángulo y del cuadrilátero.

Sin embargo, a pesar del gran potencial didáctico de Cabri Géomètre, los profesores de matemáticas experimentan aún serias dificultades para integrarlo en la enseñanza. De esto se discute en el trabajo titulado "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", donde se considera que una de las causas de esta situación es la falta de una práctica de referencia y se hacen algunas propuestas interesantes para enfrentar esta problemática.

En los artículos que aparecen en este número, los lectores encontrarán más información acerca de estos y otros temas que preocupan a la comunidad de investigadores interesados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

*El Comité Editorial*

# ¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto? Un estudio exploratorio[1]

Alfinio Flores Peñafiel

Yo sé que funciona porque mi maestra no me mentiría.

UN ALUMNO DE 12 AÑOS DE SEXTO GRADO

**Resumen:** Se dan ejemplos de los esquemas de justificación utilizados por los alumnos de los grados 5 a 10. Los alumnos respondieron a las preguntas *1)* "¿Qué has aprendido recientemente en matemáticas?" y *2)* "¿Cómo sabes que es cierto?" Las entrevistas fueron conducidas por futuros maestros o maestros en ejercicio. Se dan recomendaciones de lo que pueden hacer los maestros para aumentar la habilidad de justificación de sus alumnos en matemáticas.

*Palabras clave*: esquemas de justificación, demostración matemática, esquemas de prueba, argumento convincente, evaluación por entrevista.

**Abstract:** We give examples of schemes of justification used by students in grades 5 through 10. Students answered the questions: *1)* "What have you learned recently in mathematics?" and *2)* "How do you know it is true?" Interviews were conducted by prospective and in-service teachers. We give a few suggestions of what teachers can do to increase their students' ability to justify in mathematics.

*Keywords*: justification schemes, mathematical demonstration, proof schemes, convincing argument, interview assessment.

Fecha de recepción: 3 de diciembre de 2004.

[1] Este artículo está basado en entrevistas conducidas por Sean Berrett, Angie Bilbao, Jamie Bolster, Amelia Clarkson, Hyun Jung Kang, Sarah Kinner, Chris Lemke, Hsiu-Mei Lin, Dmitri Logvinenko, John Lowery, Megan Murphy, Rachel Neuharth, Julia Petersen, Koyal Roy, Jeffrey Samson, Jeanne Scown, Ambur Sedlar, Jane Smoudi, Sarah Winzeler.

Los estudiantes de los grados intermedios (6 a 9) aprenden gran cantidad de matemáticas que van más allá de hechos que son obvios o que pueden verificarse fácilmente, tales como operaciones con números racionales o negativos e identidades algebraicas. Algunos de los conceptos que aprenden fueron desarrollados por los matemáticos a lo largo de varios siglos y no son, de manera alguna, evidentes. Este artículo describe diferentes modos en los que los alumnos justifican lo que han aprendido en matemáticas. No se pretende discutir el significado filosófico de verdad en matemáticas, sino simplemente presentar cómo los alumnos saben que las afirmaciones que aprendieron en la escuela, tales como que "un negativo por un positivo es siempre negativo" o que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, son efectivamente ciertas.

Como muestra la cita del inicio, la mayoría de los alumnos de estos grados tienen confianza en sus maestros y están convencidos de que lo que están aprendiendo es cierto. Los alumnos rara vez cuestionan las matemáticas que se enseñan en las escuelas. Sin embargo, no todo lo que los alumnos piensan que es cierto resulta ser de veras cierto. Algunas veces los alumnos no recuerdan correctamente lo que dijo el maestro o malinterpretan la información recibida. Por ejemplo, una alumna de 13 años de 8° grado dijo: "Aprendí cómo hacer los números irracionales y racionales... Un número racional es un número donde se repite como 0.4646464646... Un número irracional no se puede convertir en un decimal... Es cierto, porque mi maestro me dijo que lo era". (La verdad, desde luego, es que un número irracional puede convertirse en un decimal, pero la expansión decimal será infinita y no periódica.) Es por tanto importante que los alumnos desarrollen métodos para ser capaces de justificar por sí mismos que un procedimiento sea correcto o que un hecho sea verdadero. Conforme las matemáticas que estudian se vuelven más abstractas y sofisticadas, paralelamente los estudiantes deben desarrollar sofisticación matemática en sus maneras de justificar lo que han aprendido. Como maestros, debemos entender los modos que los alumnos utilizan, a fin de poder partir de esos métodos y ayudarlos a desarrollar su habilidad para esgrimir argumentos convincentes en matemáticas.

A continuación daremos una breve descripción de algunos trabajos previos en el área de justificación y prueba en el aprendizaje de las matemáticas. Luego describiremos el marco teórico utilizado (esquemas de justificación), así como los métodos y procedimientos. La parte principal de este artículo proporciona ejemplos de los esquemas de justificación utilizados por los alumnos entrevistados. Al final del artículo, expondremos algunas recomendaciones de lo que pueden hacer los maestros para aumentar la habilidad de justificación de sus alumnos.

## INVESTIGACIONES SOBRE PRUEBAS Y JUSTIFICACIONES

Varios autores han señalado las diferentes funciones que tiene la demostración en la enseñanza de las matemáticas (Bell, 1976; De Villiers, 1999; Hanna y Jahnke, 1996). Entre las funciones mencionadas están:

- Verificación (trata de la verdad de una afirmación).
- Explicación (da comprensión de por qué es verdadero).
- Sistematización (la organización de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales).
- Descubrimiento (invención o descubrimiento de nuevos resultados).
- Construcción de una teoría empírica.
- Exploración del significado de una definición o las consecuencias de una suposición.
- Incorporación de un hecho bien conocido en un marco nuevo y verlo así desde una nueva perspectiva.

Las diferentes funciones de la prueba en matemáticas se pueden resaltar más o menos de acuerdo con las necesidades de la audiencia. Por ejemplo, Hersh (1993) dice que la prueba matemática puede convencer y explicar. Señala que, en la investigación matemática, su principal función es convencer y que, en el nivel medio superior y superior, su principal función es explicar.

Dada la importancia de las justificaciones y demostraciones en las matemáticas y su aprendizaje, no es de sorprender que haya un considerable cuerpo de investigación acerca de diferentes aspectos relacionados con ellas. La investigación empírica en educación matemática se ha enfocado en buena medida a describir y analizar las respuestas de los alumnos a cuestiones que requieren demostración. Existe abundante información de que la mayor parte de los alumnos tiene dificultades en seguir o construir argumentos deductivos presentados de manera formal, para entender cómo difieren de la evidencia empírica, y en utilizarlos para derivar nuevos resultados (Chazan, 1993; Fischbein, 1982; Harel y Sowder, 1998; Porteous, 1994; Schoenfeld, 1989). Martin y Harel (1989) encontraron que muchas de estas dificultades también son comunes en futuros maestros de primaria.

La investigación ha mostrado que algunos alumnos sostienen que medir los lados o ángulos de una figura, al igual que escribir una prueba deductiva, les permite llegar a conclusiones que son ciertas y aplicables a conjuntos que tienen un número infinito de elementos. Por otro lado, algunos alumnos ven las pruebas en geometría como pruebas para un solo caso: el que está representado en el diagrama asociado. No aprecian el aspecto genérico de los diagramas en las demostraciones geométricas (Chazan, 1993). Schoenfeld (1989) encontró que, a pesar de afirmar que las construcciones geométricas y las pruebas están relacionadas estrechamente, en problemas de construcción los alumnos se comportan como si su conocimiento relacionado con pruebas no existiera.

Según Fischbein (1982), cuando se trata de alumnos que estudian matemáticas, al considerar el posible impacto de un cuerpo de información o de un patrón de procedimientos en la dinámica del pensamiento productivo, debemos tener en cuenta el tipo y la fuerza de la credibilidad asociada a ellos por el estudiante. No basta que los alumnos aprendan pruebas y aprendan la noción general de una prueba. "El sentimiento de la necesidad universal de una cierta propiedad no es reducible a un formato puramente conceptual. Es un sentimiento de concordancia, una base de creencia, una intuición, pero que es congruente con la aceptación formal correspondiente" (p. 17). Es importante, por tanto, no sólo que un argumento sea correcto, sino que el alumno lo crea y lo entienda. Hanna (1990) sugiere el uso, siempre que sea posible, de pruebas que expliquen y no de pruebas que sólo prueben.

Healy y Hoyles (2000) investigaron las características de los argumentos reconocidos por alumnos de alto aprovechamiento de 14 y 15 años de edad como demostraciones en álgebra, así como las razones detrás de sus juicios y las maneras en que construyen pruebas para sí mismos. Healy y Hoyles encontraron que los alumnos tienen simultáneamente dos concepciones diferentes de prueba. Por un lado, aquéllas sobre argumentos que consideran que recibirían la mejor calificación y, por el otro, aquéllas sobre argumentos que ellos adoptarían para sí mismos. En la primera categoría, los argumentos algebraicos son populares. En la segunda, los alumnos prefieren argumentos que pueden evaluar, que encuentran convincentes y explicativos. Estas preferencias excluyeron razonamientos algebraicos. Los argumentos empíricos predominan en las demostraciones construidas por los propios alumnos, aunque la mayoría está consciente de sus limitaciones. Los alumnos más exitosos presentaron las pruebas usando el lenguaje cotidiano, en vez de utilizar álgebra.

Balacheff (1987) distingue las siguientes etapas en la evolución de los alumnos de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales: empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico, experiencia mental. Otros autores también describen que hay varias etapas previas necesarias para que los alumnos comprendan una demostración formal. Para Blum y Kirsch (1991), una prueba preformal es una cadena de conclusiones correctas no representadas formalmente que se refieren a premisas válidas no formales. Ejemplos particulares de tales premisas incluyen objetos reales dados de manera concreta, hechos geométricos intuitivos, ideas básicas orientadas a la realidad o afirmaciones intuitivamente evidentes, comúnmente entendibles o sicológicamente obvias. Las conclusiones se deben suceder unas a otras en su orden sicológico natural. Las conclusiones deben poderse generalizar directamente del caso concreto. Si se formalizan, deben corresponder a argumentos matemáticos correctos. Para aceptar una prueba preformal no es, sin embargo, necesario que tal formalización se realice o sea siquiera reconocible. En cualquier caso, las pruebas preformales deben ser válidas y rigurosas. Para Blum y Kirsch, "riguroso" no es de manera alguna equivalente a "formal".

Simon (1996) propone que la búsqueda de los alumnos de comprensión en matemáticas y para determinar validez matemática conduce no sólo al pensamiento inductivo y deductivo, sino también a un tercer tipo de pensamiento: el razonamiento transformacional. Aunque el razonamiento inductivo o deductivo puede conducir a los alumnos a convencerse de la verdad de una idea, con frecuencia lo que buscan es un sentido de cómo funciona el sistema matemático en cuestión.

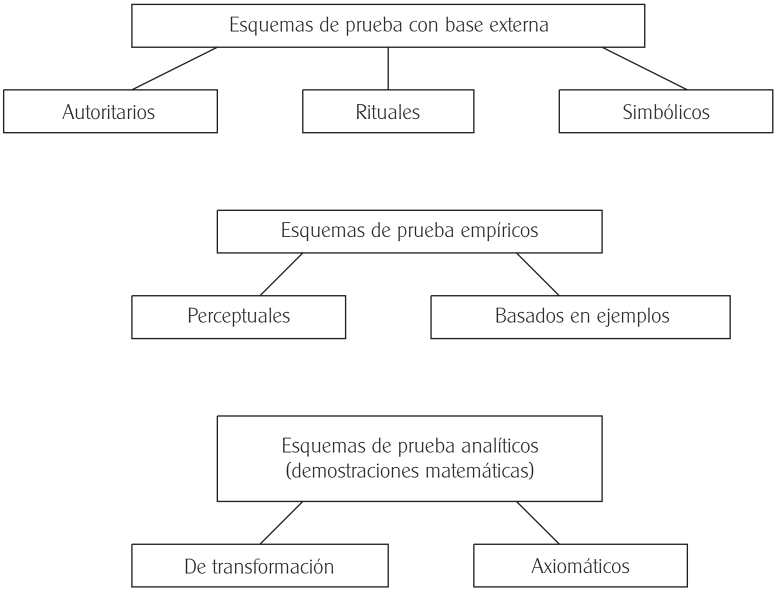
En la siguiente sección describiremos los tipos de esquemas de justificación propuestos por Sowder y Harel (1998). Estos esquemas nos permitirán agrupar y entender mejor los tipos de argumentos ofrecidos por los alumnos.

## MARCO TEÓRICO: ESQUEMAS DE JUSTIFICACIÓN

Probar o justificar resultados en matemáticas incluye convencerse a sí mismo y a otros. El esquema de justificación de un individuo consiste en las acciones que éste realiza para lograr ese convencimiento. Sowder y Harel identificaron tres tipos de esquemas de justificación utilizados por alumnos de nivel medio superior y superior. Los tipos de esquemas son: *1)* esquemas de prueba con base externa, *2)* esquemas de prueba empíricos, y *3)* esquemas de prueba analíticos, cada uno con subcategorías (véase la figura 1).

En los esquemas de prueba con base externa, lo que convence al alumno o lo que el alumno hace para persuadir a otros proviene de una fuente exterior. Estas fuentes exteriores pueden ser una autoridad, como en el esquema autoritario; la forma de un argumento, como en el esquema ritual; o la manipulación sin

**Figura 1** Esquemas de justificación




sentido de símbolos, esto es, el esquema simbólico. La autoridad puede ser el libro de texto o una persona con autoridad, tal como un padre o un maestro. En los esquemas de prueba empíricos, las justificaciones se basan solamente en ejemplos. Las personas dependen, por lo general, de ejemplos para formar conceptos. Los alumnos también valoran los ejemplos como un medio para entender o para verificar su comprensión de las ideas. Sowder y Harel identificaron dos tipos de esquemas de prueba empíricos: los esquemas de prueba perceptuales y los esquemas de prueba basados en ejemplos. Los alumnos que argumentan sobre la base de percepciones de un solo dibujo están utilizando el esquema perceptual. En los esquemas basados en ejemplos, los alumnos emplean uno o más ejemplos para convencerse a sí mismos o a otros. En los esquemas de prueba analíticos, los argumentos que se dan son generales e involucran razonamiento matemático en vez de ejemplos. Hay dos subtipos: esquemas de prueba analíticos de transformación y esquemas de prueba analíticos axiomáticos. La característica general de los esquemas de transformación es que los alumnos tratan con los aspectos generales de una situación y que involucra razonamiento orientado al caso general. Harel y Sowder (1998) señalan que un ejemplo particularmente importante del esquema de prueba de transformación es el uso transformativo de los símbolos: "Las manipulaciones de símbolos son llevadas a cabo con la intención de derivar información relevante que profundice la comprensión de uno... En tal actividad el individuo no forma necesariamente imágenes específicas de algunas o de todas las expresiones algebraicas y relaciones... sólo en etapas críticas en este proceso" (p. 264). Sowder y Harel consideran el esquema de prueba de transformación como un precedente necesario para el último esquema de prueba: el esquema de prueba axiomático. Se puede organizar un campo desarrollado de las matemáticas de modo que los nuevos resultados sean consecuencias lógicas de los que los preceden. Las pruebas de los nuevos teoremas se basan solamente en axiomas o en teoremas demostrados con anterioridad. Sowder y Harel elaboraron su marco basados en su trabajo con alumnos del nivel medio superior y del nivel superior. Con algunas adaptaciones, este marco ha sido utilizado anteriormente para describir los esquemas de justificación de los alumnos de primaria (Flores, 2002).

## MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

### ENTREVISTAS

Este artículo se basa en entrevistas conducidas por futuros maestros y maestros en ejercicio en un curso de métodos de enseñanza de las matemáticas en la Universidad Estatal de Arizona. La mayoría de los alumnos entrevistados, y foco principal de este artículo, corresponde a los grados 6 a 9 (véase el cuadro 1). Para este artículo también se incluyeron algunos ejemplos de alumnos de 5° de primaria, y algunos del grado 10, cuando el tema descrito era uno que comúnmente se cubre en los grados 6 a 9. Cada maestro escogió cuatro alumnos de acuerdo con razones prácticas de accesibilidad y participación voluntaria. Los alumnos fueron entrevistados de manera individual. Primero, el entrevistador le pidió a cada alumno que diera dos ejemplos de hechos, procedimientos o reglas que hubiera aprendido recientemente en matemáticas. Después, el entrevistador le preguntó

**Cuadro 1** Distribución de los entrevistados por grado escolar

| Grado | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de entrevistados | 2 | 13 | 23 | 20 | 6 | 3 | 2 | 1 |

al alumno cómo sabía que el hecho era cierto o que el procedimiento daría una respuesta correcta. Los entrevistadores registraron las respuestas empleando, en lo posible, el lenguaje utilizado por los alumnos. Las respuestas y diálogos fueron traducidas del inglés por el autor.

### Reflexiones de los entrevistadores

Cada uno de los entrevistadores también escribió una reflexión acerca de las entrevistas. Parte de la comprensión ganada proviene de estas reflexiones.

### Análisis de datos

Las respuestas de los alumnos entrevistados fueron agrupadas por el autor según la manera como el alumno sabía que sus enunciados eran ciertos o correctos. Los agrupamientos corresponden en gran medida a los esquemas de justificación identificados por Sowder y Harel (1998).

## ESQUEMAS DE JUSTIFICACIÓN UTILIZADOS POR LOS ALUMNOS ENTREVISTADOS

Encontramos que los alumnos de los grados 5 a 10 utilizan los tres tipos de esquemas de justificación descritos por Sowder y Harel (1998): *1)* esquemas de justificación con base externa, *2)* esquemas de justificación empíricos, y *3)* esquemas de justificación analíticos, aunque no en todos los casos encontramos ejemplos de todos los subtipos. En unos cuantos casos, los alumnos no pudieron ofrecer ninguna justificación. Por ejemplo, un alumno de 6° grado afirmó que un número multiplicado por cero es cero. Cuando le preguntaron por qué era cierto esto, respondió: “No tengo idea”. Un alumno puede usar diferentes esquemas para justificar. Muchos utilizan autoridad en un caso y justificación empírica o analítica en otro caso. Algunos incluso emplean diferentes esquemas en el mismo ejemplo. Una alumna de 13 años de 8° grado escogió el tema de exponentes y pudo explicar el significado de $4^2$ y $4^3$ en términos de $4 \times 4$ y $4 \times 4 \times 4$. Cuando el entrevistador le preguntó acerca de $4^1$ la alumna fue capaz de decir que la respuesta era 4, diciendo que multiplicas la base sólo una vez. Sin embargo, cuando le preguntaron acerca del caso $4^0$, después de una confusión inicial, la alumna revirtió al uso de la autoridad: "Cualquier número a la potencia 0 es siempre 1". Dijo que su maestro le había dicho que éste era un caso especial.

## Esquemas de justificación con base exterior

Encontramos que los alumnos entrevistados utilizan esquemas de prueba autoritarios y esquemas de prueba simbólicos. No encontramos ejemplos de esquemas de prueba rituales.

### *Esquemas de prueba autoritarios*

La mayoría de los alumnos que utilizaron este esquema se refirieron al maestro como la fuente de autoridad y, en segundo lugar, al libro de texto usado. Aunque no con frecuencia, los alumnos también usaron aparatos electrónicos como fuente de autoridad. Una alumna justificó un procedimiento, porque "lo hicieron en la computadora". A diferencia de alumnos de menor edad, que a menudo citaron como fuentes de conocimiento matemático a sus padres o a sus hermanos mayores (Flores, 2002), las autoridades matemáticas para los alumnos entrevistados de los grados 5 a 10 se encuentran casi exclusivamente en la escuela.

En algunos casos, los propios alumnos reconocen que, aunque confían en la autoridad, ellos mismos no tienen una buena comprensión de la situación matemática, como muestra la siguiente cita de un alumno de sexto grado.

> Yo sé que ésta es la forma correcta, porque mi maestra nos enseñó y ella lo aprendió de su maestro de matemáticas en la clase de la universidad, así que vino de algunas personas realmente listas. Aparte de eso, no estoy muy seguro de por qué tiene sentido.

Una alumna de 14 años de 8° grado explicó: "La distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo... El maestro me dijo la fórmula y está escrita en el libro. Nunca pensé en preguntar por qué. Realmente no sé por qué es así".

En otros casos en los que la justificación se basa en la autoridad, los alumnos no muestran si han entendido o no la situación. Un alumno de 12 años de 7° grado dijo: "Para multiplicar fracciones, pones numerador por numerador sobre denominador por denominador. Por ejemplo, $\frac{7}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{98}{6}$ ya que $7 \times 14 = 98$ y $2 \times 3 = 6$". Cuando le preguntaron cómo sabía que era cierto, respondió que el maestro lo había enseñado y había hecho muchos ejemplos. Un alumno de 10 años de 5° grado describió la multiplicación de fracciones de esta manera: "Un medio por un tercio es igual a un sexto... 1 por 1 es 1, y 2 por 3 es 6... Mi maestro me enseñó. También está en el libro". Un alumno de 14 años de 9° grado explicó cómo despejar la incógnita en una proporción: "Cuando una fracción es igual a otra fracción con una variable, multiplicas en cruz y luego despejas la variable". Cuando le preguntaron cómo sabía que este procedimiento es correcto, dijo: "Bueno, es lo que mi maestro nos dijo que hiciéramos y no me han marcado nada mal todavía".

En varios casos, la justificación dada por los alumnos se basaba en la autoridad del maestro, pero los alumnos mostraron que tenían una comprensión conceptual de la situación. Una alumna de 12 años del 7° grado dijo: "Un rectángulo es un paralelogramo". Su justificación estuvo primero basada en la autoridad: "Mi maestro hizo un dibujo y nos dijo que un rectángulo era un caso especial de un paralelogramo". Sin embargo, cuando le preguntaron por qué era cierto esto, ella fue capaz de explicarlo en términos conceptuales. "Bueno, supongo que los lados de un rectángulo son paralelos como los del paralelogramo, sólo que van derechos de arriba abajo en vez de en diagonal."

## *Esquemas de prueba simbólicos*

Varios estudiantes dieron justificaciones que eran básicamente procedimientos y manipulaciones simbólicas. Esto fue más frecuente que con alumnos más pequeños, donde esta forma de justificación externa no fue utilizada por los alumnos entrevistados (Flores, 2002). En muchos casos, la manipulación de símbolos que los alumnos mostraron correspondería a lo que Skemp (1987) ha descrito como entendimiento instrumental o reglas sin razones. Los alumnos descritos en esta sección dan cadenas de procedimientos como justificación, lo que correspondería a una orientación calculacional (Thompson, Philipp, Thompson y Boyd, 1994).

### Los alumnos dan secuencias de procedimientos como explicaciones

Un alumno de 13 años de 7° grado dijo: "Un número por un medio es lo mismo que decir ese número dividido entre dos". El entrevistador le pidió que explicara.

Alumno: No sé. Sólo quiero decir... ummmm como $7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Entrevistador: ¿Cómo sabes que esto funciona?

Alumno: Porque 7 se puede escribir como $\frac{7}{1}$ y así $7\times\frac{7}{1}$ es lo mismo que $\frac{7}{1}\times\frac{1}{2}$. De ahí tú sabes que puedes multiplicar los de arriba y los de abajo para obtener $\frac{7}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Nótese que aunque el alumno usa un ejemplo particular, la justificación se basa en una secuencia mecánica del procedimiento para multiplicar fracciones. Si el alumno hubiera calculado el valor $7 \div 2$ por una parte y luego el de $7\times\frac{1}{2}$ por otro lado y al compararlos hubiera visto que son iguales, sería un caso de una prueba empírica basada en un ejemplo.

## Los alumnos manipulan símbolos sin referencia a lo que los símbolos representan

Una alumna de 12 años de 6° grado dijo: "Cuando tienes decimales divididos entre decimales, debes arrastrar el punto decimal. No puedes dividir entre nada más que un número entero. El número debajo del signo de división puede ser un número parcial, pero no el divisor". Al preguntarle, ella explicó lo que quería decir con arrastrar. "Es cuando mueves el punto decimal lugares, dos lugares como en este problema $3.25\,\overline{)450.07}$. Según cuántos lugares arrastras el divisor es cuántos arrastras el número debajo del signo de dividir." Ella dijo que la razón para arrastrar era "para aumentar el número de enfrente". Una alumna de 12 años de 6° grado dijo que era buena para dividir fracciones. Con el problema que le dieron, $\frac{3}{4}$ dividido entre $\frac{1}{4}$, "volteó" el primer número, multiplicó las fracciones y obtuvo $\frac{1}{3}$ Acerca de la volteada, ella explicó: "Es lo que haces para obtener la respuesta correcta". La alumna no mostró entender por qué una fracción se "voltea"; el procedimiento era meramente una manipulación simbólica para ella. Sin embargo, cuando le preguntaron el significado de dividir, ella dijo que significaba "cuántas veces cabe un número en otro número" y explicó que la pregunta era “cuántos $\frac{1}{4}$ caben en $\frac{3}{4}$.” Entonces se dio cuenta de que cabía tres veces y que no había hecho el problema correctamente.

## Esquemas de prueba empíricos

Las justificaciones basadas en ejemplos constituyen el esquema de justificación empírico. Los alumnos entrevistados que utilizaron esquemas de prueba empíricos fueron más allá de ofrecer simples argumentos perceptuales.

### *Esquemas de pruebas basados en ejemplos*

La mayoría de la información empírica ofrecida en las entrevistas corresponde a dos clases, una involucra medición, la otra, ejemplos numéricos.

**Los alumnos justifican midiendo o traslapando**

Una alumna de 16 años del 10° grado explicó acerca de pares de ángulos lineales.

Alumna: Los pares lineales suman 180 grados.
Entrevistador: ¿Qué es un par lineal?
Alumna: Es cuando dos ángulos están juntos y forman una línea. Y una línea es 180 grados, por tanto, los ángulos suman 180 grados.
Entrevistador: Bueno, ¿cómo sabes que esto es cierto?
Alumna: En la clase medimos un montón de pares lineales para asegurarnos de que sumaban 180. Y todos los pares lo hicieron, así que pienso que siempre lo hacen.

La alumna también aprendió acerca de ángulos opuestos por el vértice: “Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes... Puedes doblar los ángulos y moverlos de modo que queden justo uno encima del otro”. La alumna dibujó algunos ángulos opuestos por el vértice y dobló el papel de modo que los ángulos quedaran uno encima del otro. “Mira, son del mismo tamaño, eso significa que son congruentes.”

### Los alumnos justifican la generalización usando ejemplos numéricos

Una alumna de 14 años del 10° grado aprendió acerca de la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$. Como justificación dijo: "La propiedad distributiva es cierta, porque distribuye $a$ dentro del paréntesis. Cada vez que yo uso números diferentes, un lado es siempre igual al otro lado". En este caso, aunque la alumna muestre cierta comprensión de lo que es una variable, la justificación se basa en calcular cada lado de la ecuación con números particulares y verificar que ambos lados son iguales.

Una alumna de 12 años del 7° grado aprendió una regla para verificar si un número es divisible entre 3.

Alumna: Para saber si un número grande es divisible entre 3, sumas los números y, si ese número es divisible entre 3, entonces el número original es divisible entre 3.

Entrevistador: ¿Cómo sabes que eso es cierto para todos los números?

Alumna: En la clase tomamos muchos números diferentes y sumamos los números para ver si era divisible entre 3. Para verificar otra vez, tomamos el número original y tratamos de dividirlo entre 3. Funcionó para cada número que probamos.

Una alumna de 13 años de 8° grado dijo que las "operaciones inversas son números que se deshacen uno al otro". Al pedirle que lo justificara, dio el ejemplo $7 \times 9 = 63$, $63/7 = 9$.

## Esquemas de prueba analíticos

En estas entrevistas, encontramos esquemas de justificación que corresponden a esquemas de prueba de transformación. No encontramos ejemplos que correspondan al esquema de prueba axiomático.

### *Esquemas de prueba de transformación*

En varios ejemplos, las respuestas de los alumnos revelan "una concepción rica de situaciones, ideas y relaciones entre las ideas", lo que corresponde a una orientación conceptual (Thompson *et al.*, 1994, p. 86).

## Los alumnos usan valor posicional y sentido numérico para justificar sus respuestas

Una alumna de 13 años de 7° grado citó la definición de valor absoluto del libro: "El valor absoluto de un número es su distancia al cero en una recta numérica". La alumna utilizó el ejemplo $|-8| = 8$ para explicar que tanto 8 como −8 están a la misma distancia de cero, ocho "espacios" para ser exactos, y como la distancia no es en términos de números negativos, entonces $|-8| = 8$. También relacionó el valor absoluto con una situación de la vida real. Dijo que no importaba si debes dos galletas o si tienes dos galletas, de todos modos se trata de dos galletas. Un alumno de 13 años de 7° grado explicó la suma de decimales: "Cuando sumas decimales tienes que alinear los puntos decimales... Escribes los decimales uno debajo del otro y te aseguras de que los puntos decimales estén justo debajo uno del otro. Tienen que estar alineados". Cuando le preguntaron cómo sabía que esto era correcto, dijo:

> Porque cuando sumas decimales, tienes que asegurarte de que estás sumando los lugares correctos. Como... tienes que sumar juntas las unidades, y las decenas juntas, y los décimos juntos, y los centésimos juntos. Así para asegurarte que haces esto, alineas los decimales.

Un alumno de 12 años aprendió a multiplicar decimales. "Es como cuando haces un problema, $2.82 \times 4$, no te preocupas por el decimal hasta el final. Haciéndolo en la cabeza, pienso que es 11.22. Es fácil para mí hacer matemática mental." (La respuesta no es correcta pero está bastante cerca.) Cuando el entrevistador preguntó por qué no era 1.128, el alumno reveló sentido de la magnitud de los números involucrados: "Lo que hago es redondear 2.83 a 3, $3 \times 4 = 12$, así que la respuesta va a ser alrededor de 12."

## Los alumnos usan sentido de las operaciones

Un ejemplo de sentido de operación fue dado por una alumna de 13 años del 7° grado al explicar la regla para los símbolos cuando se multiplican números negativos. Ella piensa en un símbolo negativo como otra forma de decir lo opuesto de algo. "Así, si tuvieras $(-6) \times 5$, podrías pensar primero en $6 \times 5$, que es 30, y luego tomar el opuesto de 30, que es −30. Luego, si los dos números son negativos, $(-6) \times (-5)$, primero harías $6 \times 5$, que es 30, y luego el opuesto de 30 que sabemos es −30, y luego tomar el opuesto de −30 que sería 30." Una alumna de 12 años de 7° grado también mostró sentido de operación al relacionar la multiplicación con la suma repetida. Ella dijo: "Un negativo por un positivo es siempre negativo... Mi maestro dijo que multiplicar es como sumar el número a sí mismo. Así, cuando sumas un número negativo a sí mismo, siempre se vuelve más y más negativo." Un alumno de 12 años de 7° grado enunció las operaciones inversas que había aprendido en la escuela:

> La adición es una inversa de la sustracción.
> La multiplicación es una inversa de la división.
> La sustracción es una inversa de la adición.
> La división es una inversa de la multiplicación.

Cuando este alumno piensa en operaciones inversas en matemáticas, piensa qué operación puede invertir el proceso. Así, si tuviera que sumar $9 + 8$, para regresar a 9 tendría luego que restar 8 del resultado, esto es, $9 + 8 - 8 = 9$. Los mismos conceptos se aplican a la multiplicación y la división. Otro alumno de 7° grado explicó que las inversas son operaciones matemáticas que "se deshacen" una a la otra. "Si quieres regresar a donde empezaste, tienes que deshacer las acciones que has hecho."

### Los alumnos relacionan conceptos con conocimiento previo

A menudo, los alumnos son capaces de relacionar conceptos con conceptos más básicos, aun cuando no sean capaces de justificar todo. Un alumno de 10 años de 5° grado aprendió sobre área. "La fórmula para calcular el área de un rectángulo es largo por ancho... Recuerdo que mi maestra nos enseñó, pero no recuerdo cómo salió la fórmula." Sin embargo, el mismo alumno tenía una comprensión bastante buena de la fórmula para el área de un triángulo rectángulo.

> El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. Déjame dibujarlo *[el alumno hizo un dibujo]*. Como la mitad de un rectángulo es un triángulo, por eso es la mitad. La base del triángulo es el largo del rectángulo; la altura es el ancho. Como el área del rectángulo es largo por ancho, el área del triángulo es un medio por el largo por el ancho, esto es un medio de la base por la altura.

La siguiente justificación es de una alumna de 14 años del 8° grado. Ella usa la propiedad distributiva y revela conocimiento de los inversos aditivos.

> $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Déjame probarlo. Es un poco difícil. ¿Qué tal al revés? Yo sé cómo probarlo al revés... $(a + b)(a - b)$, expándelo. Se vuelve $a$ por $a$ que es $a^2$, luego $a$ por $(-b)$ es $-ab$, $b$ por $a$ es $ba$ o $ab$, $b$ por $-b$ es $-b^2$. Así $-ab$ y $ab$ se cancelan mutuamente, se vuelve cero... Así como $-1 + 1 = 0$, así $-ab + ab = 0$. Así lo que sobra es $a^2 - b^2$.

### Los alumnos usan relaciones matemáticas que surgen de la situación

Un alumno de 13 años de 8° grado tuvo gran dificultad para explicar su pensamiento. Mencionó incluso que siempre se le dificulta cuando la maestra le hace las mismas preguntas cuando trabaja con ella. Él explicó el procedimiento para despejar x en el problema 5: 6 = x : 36:

> Primero tienes que dividir el número total entre la parte de la razón; luego multiplicas la respuesta por la otra parte de la razón... Yo sé que es cierto, porque el número de niñas es 36 y por cada seis niñas hay cinco niños. Así, si hay 36 niñas, ¿cuántos grupos hay? Primero, divide 36 entre 6 para encontrar cuántos grupos de niñas hay, que son seis.

A pesar de sus dificultades para explicar, la respuesta de este alumno muestra que tiene una buena comprensión de las relaciones matemáticas de la situación. Su explicación no es meramente computacional, sino que revela la cuestión matemática clave del problema.

## REFLEXIONES DE LOS ENTREVISTADORES

Varios entrevistadores informaron que los alumnos tienen dificultades para hablar de lo que han aprendido en matemáticas. Uno reflexionó: "Me sorprendió la dificultad de los alumnos para dar descripciones verbales de lo que saben en matemáticas. El vocabulario y la habilidad para comunicar esta información son como un lengua extranjera para ellos." Otro entrevistador comentó que en las entrevistas "un aspecto fue común a todas: los alumnos tuvieron dificultad para explicar con palabras su comprensión de las matemáticas". Una alumna de 13 años de 8° grado mencionó que sabía un montón de hechos y reglas en matemáticas, pero que no sabía por qué eran ciertos. También exclamó: "¡Éste es el primer año en el que alguien me ha preguntado por qué estoy haciendo cualquier cosa!"

Esta dificultad para explicar no debe sorprendernos si los propios maestros con frecuencia no explican por qué algo es cierto. Un alumno de 13 años de 8° grado aprendió que "cuando multiplicas dos negativos obtienes un positivo". Dijo que así le habían enseñado. El entrevistador le preguntó cómo sabía que era cierto y el alumno respondió que nunca se lo habían explicado. Dijo que no dan una razón que explique por qué funciona, no van a fondo, sólo dicen que funciona. Otro alumno dijo: "El maestro en la escuela no nos enseña por qué funciona. Sólo dice aquí está la fórmula o ecuación y nos dice que la usemos".

Varios alumnos también tuvieron dificultad para recordar lo que habían aprendido recientemente. Un entrevistador recalcó que, sobre todo, le había sorprendido cuán poco podían los alumnos decir lo que habían aprendido este año. Algunos alumnos perciben el objetivo de la clase de matemáticas como calcular algo o encontrar una respuesta en vez de aprender o recordar algo. El siguiente diálogo es con un alumno de 10 años de 5° grado. Cuando le preguntaron qué había aprendido en matemáticas, después de una pausa como de 30 segundos, respondió finalmente:

| | |
|---|---|
| Alumno: | De veras no sé. No me diste el problema o número para resolver. |
| Entrevistador: | Lo que quiero decir es una regla o fórmula, por ejemplo, que un número impar más un número par da un impar. |
| Alumno: | Bueno, sí entiendo, pero de todos modos es muy difícil. No recuerdo ninguna. |
| Entrevistador: | ¿Qué tal algo que aprendiste el año pasado? |
| Alumno: | Si no recuerdo nada de este año, ¿cómo puedo recordar del año pasado? |

Muchos alumnos desconfiaron cuando les preguntaron por qué era cierto lo que habían aprendido. Un entrevistador reflexiona:

> Todos los alumnos se sorprendieron cuando les pregunté cómo sabían que lo que habían aprendido era cierto. Se pusieron suspicaces, como si les estuviera preguntando una pregunta capciosa. Esto en sí mismo fue revelador. Obviamente los alumnos están acostumbrados a recibir información y se espera de ellos que la crean sin cuestionar.

Otro entrevistador hizo la siguiente observación: "la idea de 'probar' sus respuestas era algo extraño para todos los niños". Un entrevistador escribió en su reflexión: "la segunda pregunta (esto es, cómo sabes que es cierto) para en seco a los alumnos". El mismo entrevistador describió cómo cambió el comportamiento de una alumna cuando le hizo la segunda pregunta: "Hasta ese momento, ella estaba sonriendo y moviéndose y, cuando hice la pregunta, la sonrisa desapareció y dejó de moverse". Un alumno de 12 años de 7° grado estaba explicando acerca de los ejes de coordenadas. Cuando oyó la segunda pregunta exclamó "¿Qué? Me estás confundiendo. ¿Estás tratando de enredarme?"

En su reflexión final, dos entrevistadores subrayaron el valor de las entrevistas para aprender acerca del pensamiento de los alumnos y cómo pueden los maestros incorporar las entrevistas en su enseñanza. Al describir la variedad de maneras utilizadas por los alumnos para justificar su conocimiento, una futura maestra se dio cuenta de cuán importante era explicar un concepto en una variedad de modos. También se dio cuenta de que no todos los alumnos aprenden dando explicaciones matemáticas, sino que los alumnos pueden aprender conceptos matemáticos al relacionarlos con escenarios del mundo real. Otra entrevistadora, una maestra con experiencia, dijo que estaba sorprendida de lo mucho que había aprendido acerca de los alumnos durante las entrevistas uno a uno y de lo que cada quien necesitaba. Se dio cuenta de la importancia de las entrevistas como un medio para evaluar. El proceso de las entrevistas también le ayudó a fijar sus propias "metas para dar oportunidades de pasar de lo concreto a lo abstracto".

## COMENTARIOS FINALES

Los maestros pueden ayudar a los alumnos a desarrollar esquemas de prueba modelando ellos mismos lo que debemos esperar de los alumnos. Un maestro puede justificar fórmulas y procedimientos, explicar las razones por las que éstos funcionan, explicar por qué los enunciados son ciertos o por qué definimos conceptos o símbolos de la manera en que lo hacemos. Los alumnos podrán de esta manera relacionar la notación con el significado detrás de ella. Por ejemplo, a la alumna que explicó cómo resolver $3.25\,\overline{)450.07}$ en términos de "arrastrar" el punto decimal, le dio gusto entender que al multiplicar tanto el divisor como el dividendo por 100, el problema se convierte en $325\,\overline{)45007}$ y que la respuesta es la misma, una situación análoga a multiplicar una fracción por $\frac{100}{100}$.

Los maestros también pueden ayudar a los alumnos a desarrollar su habilidad para hablar acerca de ideas matemáticas dándoles la oportunidad de explicar su forma de pensar a sus compañeros y al maestro. A veces es difícil hacer esto, como una de las entrevistadoras comentó: “Me fue difícil no decir algo o guiarlos a dar una explicación”. Sin embargo, después de dar a los alumnos la oportunidad de pensar acerca de la regla, ellos solos fueron “capaces de explicar cómo sabían que una regla en particular era cierta”.

Sobre todo, los maestros pueden ayudar a los alumnos a desarrollar sus habilidades para demostrar, pidiéndoles que justifiquen sus respuestas, tanto cuando sean correctas como cuando no. Los alumnos necesitan acostumbrarse a cuestionar y explicar sus propias respuestas de manera que gradualmente piensen acerca de lo que están aprendiendo y no aprendan el nuevo contenido con fe ciega. La práctica de justificar en clase también ayudará a los alumnos a recordar lo que están aprendiendo al destacar cuáles son las ideas importantes en una lección, los conceptos en los que se basan los ejercicios y cálculos, y las conexiones de estos conceptos con los conceptos aprendidos con anterioridad. Como dice Porteous (1994), al darles oportunidades a los alumnos de probar en matemáticas, tendrán la oportunidad de hacer matemáticas esenciales y tendrán la profunda satisfacción de descubrir la estructura matemática.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Balacheff, N. (1987), “Processus de preuve et situations de validation”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 2, pp. 147-176.

Bell, A.W. (1976), “A Study of Pupils’ Proof-explanations in Mathematical Situations”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, pp. 23-40.

Blum, W. y A. Kirsch (1991), “Preformal Proving: Examples and Reflections”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, pp. 183-203.

Chazan, D. (1993), “High School Geometry Students’ Justifications for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, pp. 359-387.

De Villiers, M.D. (1999), *Rethinking Proof with the Geometer’s Sketchpad*, Emeryville, CA, Key Curriculum Press.

Fischbein, E. (1982), “Intuition and Proof”, *For the Learning of Mathematics*, vol. 3, núm. 2, pp. 9-18, 24.

Flores, A. (2002), “How do Children Know what They Learn in Mathematics is True?”, *Teaching Children Mathematics*, vol. 8, pp. 269-274.

Hanna, G. (1990), "Some Pedagogical Aspects of Proof", *Interchange*, vol. 21, núm. 1, pp. 6-13.

Hanna, G. y H.N. Jahnke (1996), "Proof and Proofing", en A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, vol. 2, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 877-908.

Harel, G. y L. Sowder (1998), "Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies", en A.H. Schoenfeld, J.J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. 3, Providence, RI, American Mathematical Society, pp. 234-283.

Healy, L. y C. Hoyles (2000), "A Study of Proof Conceptions in Algebra", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 4, pp. 396-428.

Hersh, R. (1993), "Proving is Convincing and Explaining", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, núm. 4, pp. 389-399.

Martin, W.G. y G. Harel (1989), "Proof Frames of Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 41-51.

Porteous, K. (1994), "When Truth is Seen to be Necessary", *Mathematics in School*, vol. 23, núm. 5, pp. 2-5.

Schoenfeld, A.H. (1989), "Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, pp. 338-355.

Simon, M.A. (1996), "Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search of a Sense of Knowing", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, pp. 197-210.

Skemp, R.R. (1987), "Relational Understanding and Instrumental Understanding", *The Psychology of Learning Mathematics*, Hillsdale, NJ, Erlbaum, pp. 152-163.

Sowder, L. y G. Harel (1998), "Types of Students' Justifications", *Mathematics Teacher*, vol. 91, pp. 670-675.

Thompson, A.G., R.A. Philipp, P.W. Thompson y B.A. Boyd (1994), "Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics", en D.B. Aichele y A.F. Coxford (eds.), *Professional Development for Teachers of Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 79-92.

## DATOS DEL AUTOR

Alfinio Flores Peñafiel
Arizona State University
alfinio@asu.edu

# Tres mujeres adultas y sus diferentes acercamientos a los números y las cuentas[1]

**Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato**

**Resumen:** En este artículo se relatan los casos de Carmen, Olga y Sofía y sus diferentes acercamientos al aprendizaje de los números y las operaciones de suma y resta. Estos casos fueron estudiados en una investigación sobre procesos de acceso a la simbología matemática de adultos no alfabetizados mediante la metodología de ingeniería didáctica.

En particular, de la ingeniería diseñada e implementada, se destaca la importancia de la simultánea recuperación y problematización-extensión de los saberes previos (noción y usos sociales) de los sujetos de aprendizaje y cómo ello conlleva a la consecución de acciones didácticas específicas. Éstas deben responder de manera más coherente a los posicionamientos particulares de cada mujer sobre lo simbólico y sus maneras de asumir lo que saben y lo que suponen que les falta por aprender sobre las temáticas tratadas en la experiencia de enseñanza. Sin embargo, la especificidad de la intervención didáctica no implica un desvío de los principios didácticos generales asumidos en la ingeniería.

*Palabras clave*: educación de adultos, didáctica de las matemáticas, alfabetización, operaciones básicas.

**Abstract:** In this paper, Carmen, Olga and Sofía's cases are reported, as well as their different approaches to the learning of numbers and the operations of addition and subtraction. These cases were studied in a research on access processes to mathematical symbolization in non-literate adults by means of the didactical engineering methodology.

Fecha de recepción: 14 de noviembre de 2004.

[1] Este artículo integra tres ponencias, cuyos resúmenes fueron publicados en las memorias de los congresos correspondientes: "Carmen alcances y limitaciones de su cálculo mental" de María Fernanda Delprato e Irma Fuenlabrada (2003b); "Olga, desde su cálculo mental, dialoga con los números y las cuentas" de Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato (2003a). Ambas ponencias se presentaron en la RELME 17, realizada en Santiago de Chile, Chile. Y "Sofía, posibilidades y límites de un cálculo escrito arbitrario" de Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato (2003b) se presentó en el VII CNIE, realizado en Guadalajara, Jalisco, México.

Particularly, from the designed and implemented engineering, it is highlighted the importance of the simultaneous recuperation and problematisation-extension of previous knowledge (notion and social uses) of the learning subjects, and how this leads to the acquisition of specific didactic actions. These actions must respond, more coherently, to the particular suppositions each woman has about the symbolic, and their ways to assume what they know and what it is suppose they need to learn over the treated topics during the teaching experience. However, the specificity of the didactical intervention does not imply a detour from the general didactic principles supposed in engineering.

*Keywords*: adults education, didactics of mathematics, literacy, basic operations.

## INTRODUCCIÓN

Consideramos que la problemática del analfabetismo es la marginación de una simbolización con valor social. En la investigación de la que provienen los resultados que se informan en este artículo (Delprato, 2002) se retoma esta agenda desde el campo de la exclusión del dominio de la simbolización matemática, en particular, la de los números y las operaciones de suma y resta.

Una mirada al acervo teórico vigente sobre los conocimientos aritméticos de adultos de baja o nula escolaridad[2] permite detectar estudios de diversa índole. Algunos de ellos (Carraher y Carraher *et al.*, 1997) indagan "...nociones matemáticas subyacentes empleadas en contextos culturales diversos (escolar-cotidiano, diferentes prácticas laborales), para así cuestionar la concepción académica de la inteligencia que excluye la inteligencia práctica y la importancia de la situación social como condicionantes de la organización de las acciones que realiza un sujeto".[3]

Otros estudios se abocan a la indagación de concepciones extraescolares de nociones matemáticas específicas (Ávila, 1990; Ferreiro y Fuenlabrada *et al.*, 1987; Mariño, 1986; Soto, 1997; Valiente, 1995) y reconstruyen las lógicas no escolares de resolución de problemas aritméticos (por ejemplo, algoritmos utilizados en el cálculo mental) o de la lectura y escritura de números, establecen criterios para

[2] Para una revisión más amplia, puede consultarse Delprato (2002), en particular, los apartados "Estudios sobre conocimientos matemáticos no escolares" e "Interpelando las experiencias alternativas".

[3] Delprato (2002, p. 6).

identificar niveles de desempeño de los adultos y elaboran algunas implicaciones didácticas generales de los hallazgos obtenidos. Esta línea de indagación es recuperada, a su vez, por algunas producciones para proponer revisiones curriculares de planes de educación de adultos (Ávila y Waldegg, 1994; Ávila, 1997) o diseñar alternativas para la enseñanza de los algoritmos de cálculo (Mariño, 1997).

Específicamente, la propuesta de Mariño (1997), desde una postura que procura el diálogo cultural (intercambio entre saber popular y saber académico), asume como liga entre ambos tipos de saberes el trabajo simultáneo con una representación gráfica del cálculo mental (control de las cantidades de mayor orden a las de menor) y con la notación convencional (en las que se opera a la inversa), pero no tematiza[4] el tránsito de una escritura a la otra. De hecho, el conocimiento que articula ambas notaciones es, en realidad, como se argumentará más adelante, el conocimiento del sistema de numeración y éste, en la propuesta de Mariño, estaría minimizado.

A partir de esta breve revisión, puede concluirse que, si bien se han reportado algunos supuestos didácticos generales para la enseñanza aritmética a adultos, no existen trabajos que den cuenta de variables vinculadas más directamente con el diseño de situaciones de enseñanza (especificidades, variables didácticas por manipular).

Esta ausencia, junto con la disidencia a la propuesta esbozada por Mariño, justificarían la pertinencia de un estudio como el realizado por Delprato (2002), que estuvo regido por el compromiso con los adultos analfabetos en el logro del acceso al conocimiento en condiciones de ejecución específicas que permitieran desentrañar, caracterizar y valorar las componentes de una ingeniería didáctica.

Desde este interés, se estudiaron los casos de tres mujeres adultas de baja o nula escolaridad: Carmen, Olga y Sofía. Metodológicamente, se procedió con apego a los recursos de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), es decir, entre otros insumos, se diseñó e implementó una secuencia de enseñanza sobre la representación de los números y las operaciones de suma y resta y se analizó su efecto en el aprendizaje de dichas nociones por parte de las mujeres. Sin embargo, es preciso señalar que el diseño y experimentación de la ingeniería didáctica a la

[4] "La noción piagetiana de tematización es esencial para comprender esto. Significa que algo que ha sido inicialmente utilizado como instrumento de pensamiento puede convertirse en un objeto de pensamiento, cambiando, al mismo tiempo, su estatus en cuanto elemento del conocimiento [...] La tematización implica, pues, un cierto grado de toma de conciencia" (Ferreiro, 1998, p. 33).

que se alude permitió la exploración de las condicionantes de una propuesta de enseñanza, por lo que no conlleva pretensiones paradigmáticas.[5]

Para el diseño de la secuencia, se retomaron posturas de los escenarios de la educación de adultos y de la didáctica de las matemáticas (Brousseau, 1986) en torno a la importancia de la recuperación de las nociones matemáticas iniciales de las mujeres (nociones y usos sociales). Esta recuperación procuraba valorar durante todo el proceso las posibilidades de estas mujeres como sujetos de saber. A la vez, tendía a la extensión de sus conocimientos hacia el uso de una simbolización con sentido, accediendo a las funciones y a las leyes constitutivas de un sistema simbólico. Asimismo, el supuesto de dicha secuencia era que la enseñanza de los algoritmos convencionales de suma y resta están directamente correlacionados con el sistema de numeración en el que operan (sistema de base y posición).

Las mujeres fueron atendidas de manera individual. Se recurrió a la entrevista (12 sesiones de 45 minutos para cada caso estudiado) como instrumento de trabajo, pero ésta se utilizó con diferentes modalidades e intenciones: *a)* en las dos primeras, el propósito fue la indagación de antecedentes familiares y escolares, ámbitos de uso de nociones matemáticas vinculadas a la numeración y al cálculo, hipótesis sobre el sistema de numeración, rango de números conocidos y familiares, estrategias de resolución de problemas aditivos[6] (entre ellas los algoritmos de suma y resta); *b)* mientras que las 10 entrevistas restantes se ocuparon para la intervención didáctica mediante acciones de enseñanza pertinentes a cada una de las mujeres, en función de sus saberes previos, de sus posibilidades de respuesta, sus visiones sobre las temáticas trabajadas y sobre el saber matemático en general. No obstante, estas acciones específicas estuvieron reguladas por los mismos supuestos didácticos generales con la pretensión de procurar el acceso a la simbolización convencional de los números y de las "cuentas".

Los protocolos de observación se reconstruyeron mediante: grabación de audio, inclusión de transcripción de producciones escritas de las mujeres y notas de campo de la entrevistadora.

Los resultados que se registran en este artículo se estructuran en relación con la información y el análisis de los datos referentes al aprendizaje de la represen-

[5] Pese a la pretensión de no constituir a la ingeniería como una secuencia didáctica replicable, siempre es posible derivar de ella algunos recursos para la enseñanza; en este sentido, los lectores interesados pueden revisar Delprato y Fuenlabrada (2003a).

[6] "Por 'problemas de tipo aditivo' entendemos aquéllos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por 'estructuras aditivas' entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones o sustracciones" (Vergnaud, 1991, p. 161).

tación numérica convencional y al control en el plano de lo simbólico de las operaciones de suma y resta.[7] Cabe señalar, en primer lugar, que los diferentes acercamientos al aprendizaje observados en las mujeres del estudio devienen de sus particulares posicionamientos sobre lo simbólico y sus asunciones, tanto de lo que saben como de lo que suponen que les falta por aprender sobre las temáticas tratadas en la experiencia de enseñanza. Y en segundo lugar, que si bien las distintas condiciones de partida implicaron la consecución de acciones didácticas específicas, éstas no modificaron los principios didácticos generales sustentados en la ingeniería diseñada.

## TRES MUJERES, TRES HISTORIAS. SUS VÍNCULOS CON EL SABER

### CARMEN

Tiene 46 años, es originaria del Estado de México (México), ha cursado dos años de primaria y, cuando la contactamos, atendía un puesto callejero de dulces. *Carmen disponía, al inicio de la experiencia, de un cálculo mental eficiente y eficaz,*[8] en un rango numérico no mayor de 200, en el cual empleaba el registro de los datos de los problemas aditivos únicamente como recurso de apoyo. Este nivel de eficacia llevó a identificar esta estrategia de Carmen como un cuasi algoritmo, es decir, como un procedimiento de resolución sistemático. Así, por ejemplo, se le presenta el problema:

> Pagas en el súper la compra y la cajera no tiene para darte tu vuelto de $65. Entonces la cajera te pide algo de cambio. Se lo das. Si te dan $110 de vuelto, ¿cuánto te pidió de cambio la cajera? [110 – 65 = 45]

Para resolverlo, hace uso de una estrategia no convencional, busca el complemento aditivo por aproximaciones sucesivas, calculando en sentido de menor a mayor, controla mentalmente lo que va sumando y procede sistemáticamente:

[7] No debe entenderse, sin embargo, que los números y las operaciones aparecieron sin referente contextual; de hecho, surgieron a lo largo de la experiencia de aprendizaje para solucionar diferentes problemáticas.

[8] "...eficiencia, es decir, número de tanteos necesarios para lograr resultados correctos; [...] eficacia, entendida como la capacidad de obtener resultados correctos" (Ávila, 1990, p. 60).

C. [silencio] Eh ... ¿Cuarenta y cinco (es correcto)?
E. A ver, ¿cómo hiciste?
C. Sumé.
E. Sí, yo escuchaba que en voz bajita decías sesenta y cinco.
C. Setenta, ochenta, noventa, cien, ciento diez. ¿Sí?

(Delprato, 2002, p. 132)

*Reconstrucción del algoritmo mental:*
Resolución convencional: 110 − 65
(sólo escribe uno de los datos: 65)

45
argumentación:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 65 (+ 5) | = | **70** | 5 |
| (70 + 10) | = | **80** | + 10 |
| (80 + 10) | = | **90** | + 10 |
| (90 + 10) | = | **100** | + 10 |
| (100 + 10) | = | **110** | + 10 |
| | | | 45 |

Asimismo, dadas las características mencionadas, *la entrevistada valorizaba este recurso disponible al punto de mostrarse como la estrategia predilecta de resolución en desmedro del cálculo escrito*. Cabe señalar que Carmen conocía el cálculo escrito (suma y resta), así como su lógica subyacente, pero de modo implícito. También era capaz de identificar la operación (de suma o resta) que permite resolver cierto tipo de problemas aditivos.[9]

## Olga

Nació en el estado de Guerrero (México), tiene 25 años, no ha tenido acceso a la escolaridad, pero dispone de una fuerte expectativa de acceso a lo educativo. Su migración al Distrito Federal en busca de trabajo (es empleada doméstica) le significó colateralmente una reapertura en su historia personal de esa expectativa:

> Quería estudiar, pero ahora sí que yo oí hablar del INEA,[10] nada más que allá [en Guerrero] es difícil, te salen caros los materiales, entonces no, no... y aquí

[9] Al inicio de la secuencia, Carmen pudo resolver con éxito las siguientes categorías aditivas (Vergnaud, 1991): 1ª categoría, búsqueda de la medida compuesta; 2ª categoría, búsqueda del estado inicial cuando la transformación es negativa; 4ª categoría, búsqueda de una transformación elemental cuando las transformaciones son opuestas; 5ª categoría, búsqueda del estado inicial; 6ª categoría, búsqueda de uno de los estados relativos. No pudo resolver correctamente la 3ª categoría, pues vacilaba entre identificar la incógnita (la otra medida) con la medida elemental ya proporcionada o con la relación.

[10] Siglas del Instituto Nacional para la Educación de Adultos (de México). A Olga se le contactó en un grupo de alfabetización del Instituto.

> aparte de que trabajo, eso me da campo de estudiar, me da campo [...] es como yo decía, yo quiero seguir estudiando y que no me llegue a pasar nada y, mientras pueda, voy a echarle ganas a estudiar, porque me da pena ver que otras personas saben y yo no.

Olga mostraba seguridad y confianza en sus saberes matemáticos, pese a la vivencia de la exclusión y de la valorización del acceso a la escolaridad:

> Pues sí, o sea, no los conozco [se refiere a los números] en la forma de... como por ejemplo, el número [...] para escribirlo no lo sé [...] Para contar sí, cuento de 1, 2, hasta el 200, 300, ¡el 500, 1 000! Pero nada más en voz, no para verlos ni para...

*Olga, inicialmente, sólo interpretaba y producía números con soltura hasta el 20; no era consistente en la aplicación de criterios ni en la interpretación ni en la producción de números mayores; no acudía a ningún tipo de registro como apoyo en la resolución de problemas y su recurso de solución era un cálculo mental signado por varios intentos y pocas probabilidades de éxito.*

## Sofía

Proviene del estado de Hidalgo (México), tiene 28 años, no ha ido a la escuela (cuando se realizó la experiencia, cursaba la primaria en el INEA) y trabaja como empleada doméstica. *Sofía, al inicio de la experiencia, resolvía los problemas propuestos mediante un cálculo escrito erróneo, apoyándose en el registro de los datos numéricos y algún dato de su contexto,* como puede observarse en el siguiente registro:

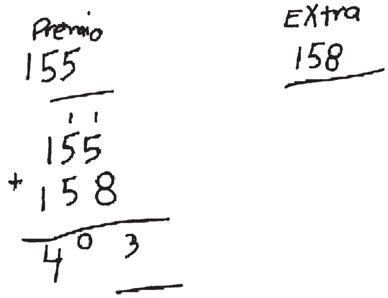
Problema: "Si usted no falta, su patrón le prometió un premio de $155 por mes. Pero, además, este mes, como vinieron visitas, también le pagaron $158 extras. ¿Cuánto cobrará extra este mes?" [155 + 158 = 313]

[Después de que resuelve la operación en silencio, la entrevistadora le pide que la argumente]

S. Me salió cuatrocientos tres (es incorrecto).
E. ¿Cuatrocientos tres? A ver, ¿cómo le hiciste?
S. Sí, porque son trece *[resultado de sumar las unidades 5 + 8]*. Son 10 *[suma las decenas]*, llevamos una *[se refiere al 1 que escribió en la columna de las decenas]*. Y dos, más los dos *[señala los 1 "que se llevaba"]*, cuatro.

(2ª E.33)

Su anotación es:




A pesar de la ineficacia mostrada en su cálculo escrito (pues aplicaba toda transformación al orden mayor, las centenas, y anotaba los reagrupamientos encolumnados, no en el grupo al que afectaría, sino sobre los grupos en el que se originaban estos reagrupamientos), tenía una fuerte creencia en esta modalidad de resolución. La dificultad que esta preeminencia de lo simbólico ocasionó en Sofía fue su búsqueda de modos de control intrínsecos a lo simbólico, es decir, demandaba (a la entrevistadora) procedimientos para su control que le posibilitaran prescindir de algún referente concreto.

La sucinta semblanza de las tres mujeres y sus vínculos con el saber, descrita en los párrafos precedentes, sitúan a Carmen como un caso interesante, porque en él –como se mostrará más adelante– se devela cómo el cálculo mental (estrategia dominante) puede constituirse tanto en una potencialidad como en un obstáculo para el aprendizaje del cálculo escrito. Mientras que, en Olga, se evidencian las asunciones didácticas que posibilitaron que ella reconociera los vínculos entre la escritura de los números, la interpretación del sistema de numeración y el desarrollo de estrategias de cálculo. Asimismo, la secuencia le permitió llegar a la representación escrita, lo que significó el desplazamiento de la reiteración de los datos del problema para poder recordarlos (gesto propio de las culturas orales). Así, la escritura significó para Olga un recurso, no sólo para "representar" los problemas, sino también para su resolución a través de un cálculo más eficiente y eficaz: el algoritmo de la suma y de la resta. Aunado a ello, el interés de este caso consiste también en que, si bien Olga –en relación con las otras dos mujeres– llega más lentamente a lo simbólico, por su ausencia inicial de registro, responde de un modo más natural y fluido a la intervención didáctica, es decir, presenta menos resistencias a la propuesta.[11] Finalmente, el interés del caso de Sofía radica en algunos rasgos de sus conocimientos aritméticos previos. Sofía valorizaba, como se señaló, el cálculo escrito como la estrategia preferida de resolución en detrimento del cálculo mental. Quizás esta predilección se vinculase con su mirada sobre el valor del acceso a lo simbólico y su importancia en el ámbito escolar. Este posicionamiento de Sofía frente a lo simbólico no es en sí totalmente cuestionable, pero el algoritmo que tenía Sofía como único recurso para el cálculo era erróneo; al inicio de la experiencia, nunca hizo el intento de recurrir al cálculo mental, simplemente porque no le otorgaba a éste ningún valor.

## INTERVENCIÓN DIDÁCTICA DISEÑADA

### CARMEN

*La ingeniería didáctica diseñada con Carmen procuró dotarla de un recurso alternativo al cálculo mental y, simultáneamente, redefinir la valorización de éste como estrategia privilegiada de resolución.*

*El recurso alternativo propuesto fue el cálculo escrito. Para ello, fue necesario fortalecer el dominio inicial que tenía Carmen de los procesos de resolución de la suma y de la resta, dotándola de posibilidades de argumentación de los procedimientos algorítmicos al tematizar la lógica subyacente de éstos.* La explicitación de dichos procedimientos y sus vínculos con las leyes del sistema de numeración decimal (SND) permitiría que Carmen dispusiera de este recurso con mayor autonomía y con mayores posibilidades de generalización.[12]

Con este propósito, en la secuencia se enfrentó a Carmen con situaciones que le dieran la posibilidad de familiarizarse con:

[11] En Carmen, la sobrevaloración de su cálculo mental (Delprato y Fuenlabrada, 2003b) y, en Sofía, la preeminencia de lo simbólico (construido erróneamente) en detrimento de la evocación de un referente de uso social (el sistema monetario) (Fuenlabrada y Delprato, 2003b), se manifestaron como obstáculos en el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

[12] Panizza (2003) advierte sobre la postura didáctica diferente de la tradición escolar frente a los mecanismos de cálculo, signada por niveles de automatización que hacen olvidar que dichos mecanismos también requieren construcción: "...el riesgo es considerar que los *conceptos* son motivo de construcción, que están ligados al sentido, a la comprensión, mientras que los *mecanismos* están desprovistos de sentido y puede accederse a ellos por observación sensorial. Es así como en algunas corrientes de enseñanza coexisten una *concepción constructivista* de la enseñanza de los conceptos matemáticos y una *concepción empirista* en relación con los sistemas simbólicos" (p. 52).

- Las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupar y desagrupar,[13] respectivamente).
- Las leyes de escritura de los números (posicional y decimal).
- Los procedimientos algorítmicos (encolumnar, dirección más eficaz de resolución, transformaciones).

La interacción con las *transformaciones implícitas en los algoritmos de la suma y la resta* se provocó mediante la implementación del juego de *El Cajero* (Fuenlabrada, Block, Balbuena y Carvajal, 1991) con algunas modificaciones. En este juego,[14] como material se utilizaron fotocopias del sistema monetario mexicano (monedas y billetes de $1, $10 y $100).[15] El uso de este material obedece a que el dinero es un portador social de uso de los números que permite recuperar la familiarización implícita con las leyes de cambio relacionadas con la organización decimal del SND; estos dos aspectos son reconocidos en general por los adultos no alfabetizados (Delprato y Fuenlabrada, 2003a).

Este juego consiste en ir tirando dados para las diferentes posiciones del SND (unidades, decenas, centenas) por turnos y pedir o entregar dinero (monedas de $1 y $10, y billetes de $100) al cajero en función de lo que los dados señalen. En el cajero *ascendente* se va pidiendo dinero y, cada vez que se reúnen 10 monedas del mismo valor, deben cambiarse por una del valor inmediato superior; gana el primer jugador que logra reunir una cantidad de dinero preestablecida. En el cajero *descendente*, en cambio, se va entregando dinero al banco, la cantidad exacta de dinero que indiquen los dados; gana el primer jugador que se deshaga de su dinero.

Como puede deducirse, este juego propicia una familiarización con los procedimientos de reagrupar y desagrupar requeridos para la resolución de las "cuentas" de suma y resta, asentados en la regla de cambio del SND (se requieren 10 de un grupo para obtener 1 del grupo inmediato superior, o –a la inversa– con 1 de un grupo se pueden obtener 10 del grupo inmediato inferior). El cajero ascendente promueve esta familiarización, al contemplar dentro de sus reglas la

[13] Reagrupar: acción de cambiar 10 de un grupo menor por 1 del inmediatamente mayor, comúnmente llamado en México: "llevar". Desagrupar: acción de cambiar 1 de un grupo mayor por 10 del inmediatamente menor, comúnmente llamado en México: "pedir".

[14] Para conocer su potencial como recurso didáctico, consúltese Delprato y Fuenlabrada (2003a).

[15] En México circulan monedas o billetes de: $1, $10, $100, $2, $20, $200, $5, $50 y $500; en las caras de los dados que se utilizan en el juego, aparecían (dos veces), respectivamente, los números: 1, 2 y 5; 10, 20 y 50; 100, 200 y 500.

exigencia de realizar reagrupamientos (cada vez que se tienen 10 monedas de un tipo DEBEN cambiarse); y el cajero descendente, al demandar el pago con cantidades EXACTAS, enfrenta a situaciones de desagrupamientos (necesidad de cambiar con el cajero antes de pagar para hacerlo de manera exacta).

Asimismo, en el contexto del juego mencionado, se promovió el desocultamiento de las *leyes de escritura*. A medida que se jugaba, se iban registrando las cantidades obtenidas (de los tiros y las resultantes después de pedir o entregar dinero) en una tabla, lo que permitía poner en evidencia el carácter posicional del SND. El único rastro de la variación del valor de las cifras es el lugar que ocupan y esto se explicitaba en los encabezados de las columnas que componían la tabla ($100, $10, $1). Esta modalidad de registro, al confrontarse con la escritura habitual de los números, permitía develar entonces el carácter relativo del valor de las cifras en función de la posición en un número. Pero, a la vez, este reconocimiento de la lógica posicional de la representación escrita de los números demanda la aplicación de agrupamientos exhaustivos (respetando la regla de cambio mencionada). Esta exigencia de exhaustividad en los agrupamientos se mostró a través de la problemática de la escritura de cantidades representadas materialmente sin correspondencia con la escritura convencional (por ejemplo, $150 representados con 14 monedas de $10 y 10 monedas de $1). Así, la entrevistada reconoció la necesidad de aplicar los reagrupamientos para obtener la escritura convencional de una cantidad (es decir, en el ejemplo citado, cambiar 10 monedas de $10 para obtener 1 billete de $100 y 10 monedas de $1 por 1 moneda de $10, teniendo finalmente –como lo indica la escritura del número 150– 1 billete de $100, 5 monedas de $10 y ninguna moneda de $1). Esta reflexión también permitió argumentar la transformación de "reagrupar", implícita en el algoritmo de la suma, y que Carmen sólo podía nominar como "me llevo una", desconociendo su significado y fundamento. Finalmente, la tabla enfrentó a Carmen con algunas componentes de eficacia de los *procedimientos algorítmicos* habituales que han contribuido a su adopción como convencionales. Por ejemplo, la ubicación de las cifras correspondientes a una misma posición una debajo de otra (encolumnar) como un mecanismo facilitador del cálculo; pues este procedimiento, junto con el carácter posicional del SND, hace posible el tratamiento de las cifras como dígitos, en contraposición al recurso de descomposición aditiva empleado por el cálculo mental. Ello se hizo evidente en una situación de dictado de sumandos de diversa cantidad de cifras.

Por otro lado, el sentido de la resolución de derecha a izquierda (en contraposición con la dirección de izquierda a derecha, o sea de las cifras mayores a las menores, del cálculo mental) se analizó en el contexto de la resolución de operaciones aditivas –de suma y resta– (con transformaciones) en la tabla. Se propuso probar por dónde iniciar el cálculo para no tener que borrar. Así, al confrontar con los algoritmos convencionales, Carmen pudo vincular la resolución de derecha a izquierda como un procedimiento que permite evitar estar borrando cada vez que se hace un reagrupamiento.

*Además, se instauró el algoritmo ampliado,*[16] *y en definitiva la escritura, como alternativa de eficacia frente a la mayor complejidad operatoria.* Para ello, se presentó el algoritmo ampliado como un recurso para controlar las transformaciones (reagrupar y desagrupar) que posibilita prescindir de la necesidad de retener en la memoria las transformaciones sucesivas ("lo que me llevé" o "lo que pedí").

*La redefinición de la valorización del cálculo mental como estrategia predilecta de resolución, que era sostenida por Carmen, se realizó orientando el sostenimiento de su uso como recurso de validación y, simultáneamente, develando sus alcances.* Así, fueron constatándose los límites del cálculo mental por su pérdida de eficacia frente a una mayor complejidad operatoria. Incluso, se puso en evidencia como fuente de error en el uso del algoritmo ampliado, cuando Carmen lo utilizaba como mero mecanismo de explicitación y no como recurso de apoyo de la operación. Esto se manifestaba en que, inicialmente, recurría al algoritmo ampliado, pero lo utilizaba en el agrupamiento en el que iba a operar sin registrar la transformación del reagrupamiento afectado, lo cual limitaba su eficacia cuando se realizaban varias transformaciones sucesivas sobre un mismo agrupamiento. En el siguiente ejemplo, puede observarse que este uso inicial que Carmen hacía del algoritmo ampliado asentado en la memorización de resultados parciales, la lleva a cometer un error, pues le impide recordar que las centenas han sido afectadas por varios cambios, por lo cual quedan nueve centenas en vez de las diez que ella considera:

[16] Se denomina *algoritmo ampliado* aquel en el que se incorporan anotaciones marginales para indicar las transformaciones realizadas, es decir, los reagrupamientos en la suma ("lo que me llevo") y los desagrupamientos en la resta ("lo que pedí").

C. *[va diciendo en voz baja mientras resuelve]* Quince *[escribe 15 arriba de las unidades].*

C. A quince le quitamos siete ... ocho. Ocho *[escribe 8 en el resultado en las unidades].*

C. A doce ... a once *[escribe 11 arriba de las decenas]* le quitamos ... cuatro ... siete *[escribe 7 en el resultado en las decenas].*

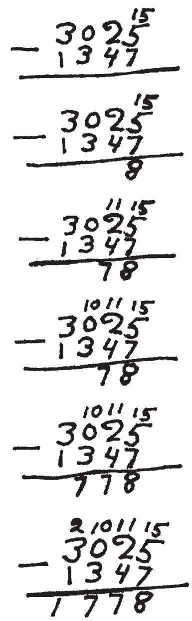
C. Siete. Umm ... o sea que ... diez *[escribe 10 arriba de las centenas].*

C. A diez le quitamos tres, quedan ... siete *[escribe 7 en el resultado en las centenas que es incorrecto].*

C. Siete. Al dos *[escribe 2 arriba de los miles]* le quitamos una ... queda una *[escribe 1 en el resultado en los miles].*

(Delprato, 2002, p. 74)

Su anotación es:



Simultáneamente a esta explicitación de los límites del cálculo mental, sostenerlo como recurso de validación (mediante la estimación) supuso mostrarlo como una estrategia valiosa que permite la rectificación y la toma de conciencia incluso de errores ocasionados por su uso en situaciones de mayor complejidad operatoria. Por ejemplo, al sumar 87, 476 y 588, intenta resolverlo entretejiendo el cálculo mental y la manipulación simbólica, ubicando equivocadamente el 87 en la disposición convencional de la suma. Cuando obtiene 1 864, el resultado la sorprende, le parece excesivo, porque ella había estimado que tendría que ser como: "mil y feria".

## Olga

*La ingeniería didáctica que se implementó con Olga procuró darle un recurso alternativo a su accidentado cálculo mental, que restaba eficacia y eficiencia a sus cálculos espontáneos empleados para resolver problemas aditivos, revirtiendo así la ausencia de registro para retener tanto las cantidades involucradas como las operaciones.*

El recurso alternativo fue la ampliación del rango numérico dominado, el conocimiento de las leyes del SND mediante la evocación del sistema monetario y el uso de dichas leyes en la operatoria, proveyéndola en el transcurso del aprendizaje de posibilidades de argumentación para la interpretación y producción de números y de procedimientos algorítmicos.

En la secuencia, Olga se enfrentó a situaciones que le permitieran familiarizarse con:

- La ley de reagrupamiento y su inversa, la de desagrupamiento del SND.
- Las leyes de escritura de los números (posicional y decimal).
- Las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupamientos y desagrupamientos).
- Los procedimientos algorítmicos (encolumnar, dirección más eficaz de resolución).

Para propiciar que Olga empezara a interactuar con *la ley de reagrupamiento y, su inversa, la de desagrupamiento del SND* y con *las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta,* se realizó –como se hiciera con Carmen– el juego de *El Cajero*. Pero, en este caso, el énfasis se puso primero en el desocultamiento de *las leyes de escritura de los números,* en lo que respecta al valor posicional de los dígitos. Como se detalla a continuación, también se pidió a Olga que fuera registrando en una tabla con columnas (en cuyos encabezados aparecía: \$100, \$10, \$1; en ese orden) las cantidades obtenidas antes y después de realizar los cambios, y que aplicara los agrupamientos de manera exhaustiva para escribir convencionalmente cantidades según las leyes del SND.

## *Olga y los números*

La manipulación didáctica por parte de la entrevistadora de los recursos descritos (*El Cajero* y la tabla) permitió que Olga utilizara un referente (el comportamiento de los agrupamientos decimales del sistema monetario) para mejorar paulatinamente su competencia en la *interpretación* de los números.

Al inicio de la experiencia, mostró confusiones en la lectura de cantidades escritas en cartones; por ejemplo, el número 310 lo leyó como trescientos uno (301), el 130, como treinta y uno (31), el 7 500, como quinientos siete (507). Estas confusiones iniciales, que adoptan la forma de inversiones en la interpretación, quizás se deban a que Olga se centraba en las cifras reconocidas en la denominación oral de los números, pero sin considerar el papel relevante de la posición que ocupan.

Posteriormente, logra rectificar estas lecturas a partir de la identificación sugerida de los agrupamientos y de su conocimiento de los múltiplos de cien. Así, en el 864 reflexiona: *"es... ocho billetes de cien... son ocho de a cien... son* [cuenta usando los dedos] *cien, doscientos, trescientos [...] ochocientos"*, llegando a la interpretación correcta.

En la *producción* de números, Olga inicialmente combinaba diversas hipótesis, la más consolidada parecía ser la necesidad de diversidad en la escritura para números distintos. En algún momento recibe $240 en billetes (sabe cuánto dinero es), pero escribe 24, la entrevistadora, para crearle un conflicto, le entrega entonces $204 y le pide que escriba la cantidad, Olga anota también 24: *"Umm* [silencio] *éste lleva cero"* [señalando el 24 que representa al 240, lo corrige y escribe 204]. En este ejemplo, puede observarse que Olga reconocía que el 240 (en cuanto combinación de los nudos: 200 y 40) llevaba un cero, pero desconocía en qué lugar debía colocarlo. Optaba también por una escritura aditiva, apoyada en la descomposición que sugiere la serie oral, siempre que no se produzca un número de tamaño "excesivo". Por ejemplo, para el ciento cinco escribe: 100 5 (100 + 5) que no le crea demasiado conflicto; sin embargo, ante su escritura del mil quinientos como 1000 500 (1000 + 500) no se siente conforme.

De modo incipiente, en la cuarta sesión, cuando utiliza la tabla, empieza a visualizar una relación entre la regla de cambio y las leyes de escritura de los números. Niega que pueda escribirse 12 u 11 en la columna de $1, pero considera que sí puede escribirse 10 en cualquier columna (de los cienes, dieces o unos), pero después de retomar la regla de cambio, concluye que la cifra máxima es nueve. Este vínculo vuelve a explicitarse posteriormente en la escritura de cantidades producto de un reagrupamiento, aunque con oscilaciones y, por consiguiente, todavía no lo bastante consolidado como estrategia. En la quinta sesión, cuando suma la operación con contexto 274 + 83 cuenta las monedas de $10 y registra en la tabla, sin ninguna contradicción, el total (15) en la columna de los dieces. Luego se le pide que escriba la cantidad de dinero que tiene (357) y, a partir de la diferencia con la escrita en la tabla (2 157), la entrevistadora le hace notar que el origen de la diferencia entre las dos escrituras es el no respeto a la regla de cambio. Después, durante la misma sesión, en la operación con contexto 357 + 264 constata que, en total, tiene $621 (5 billetes de $100, 11 monedas de $10 y 11 monedas de $1), cuando va a registrar las monedas de

$10, se le pregunta si puede escribir 11, responde negativamente y propone cambiar sin respetar la regla de cambio, pero respetando las restricciones de escritura en cada columna en las que anteriormente había reflexionado (el número máximo posible en cada columna es 9): Tienes once monedas de diez, ¿qué harías? *"cambiar"*, ¿cuántas vas a cambiar? *"una... dos"*; ¿dos? (pregunta la entrevistadora) *"sí"* –afirma Olga– (para llegar hasta el 9).

Posteriormente, aunque persisten ocasionalmente algunas dificultades (por ejemplo, para resolver un problema escribe 61 para representar el seiscientos –seis... [6]cien[1]tos–), dispone de un recurso para rectificar esa escritura: lo hace a partir del reconocimiento de que seiscientos son seis billetes de $100 y que no tiene monedas de $10 ni de $1, borra (61) y escribe 600. En la séptima sesión, se le entregan $255 (un billete de $100, quince monedas de $10 y cinco monedas de $1), reconoce la cantidad que ha recibido y antes de registrarla propone: *"tengo que cambiar por un billete de a cien"* (se refiere a las monedas de $10).

A partir de los avances reseñados de Olga en torno a su representación numérica, puede concluirse que, aunque en estudios sobre la adquisición del sistema de numeración (Lerner y Sadovsky, 1994) se ha informado que la noción de agrupamiento no es el origen de la comprensión de la posicionalidad, la tematización de la noción de agrupamiento con Olga (cuyo referente de producción central es la serie oral y, por ende, produce escrituras no estrictamente posicionales) hace posible –al recuperar la descomposición aditiva sugerida en la serie oral– develar la posición como único rastro de dicha descomposición.

### *Olga y la operatoria*

Como ya se asentara, Olga al inicio de la experiencia no contaba con ningún recurso gráfico que le sirviera de referente para el cálculo. Por ello, solicitaba a la entrevistadora continuamente la reiteración de los datos o ella misma los repetía varias veces, como intentando "capturarlos" para poder operar con ellos. Así, por ejemplo, frente al problema: "Estás cancelando de a poco una deuda. Este mes pagaste $152 y debes aún $279, ¿qué deuda tenías antes del pago de este mes?" La entrevistada reconoce que debe encontrar el resultado de 152 + 279; para ello, redondea el sumando mayor (279) a 280 y el sumando menor (152), en principio, a 150, pero solamente opera con 100. Al final, olvida agregar los 52 y quitar el 1 que había agregado al 279 (que en el cálculo consideró como 280), por lo que llega a un resultado erróneo 380 en lugar de 431. Evidentemente, Olga ha establecido una relación semántica correcta entre los datos, su proyecto para resolver el cálculo aritmético también es acertado aunque complejo por las oscilaciones entre la consideración de un dato y otro. En el proceso, la ausencia de registro tanto de los datos como de un procedimiento algorítmico de solución, le causan un gran esfuerzo para calcular, esto puede observarse en el registro correspondiente que a continuación se presenta:

O. Doscientos setenta y nueve, le quito los dos *[se refiere a los 200]*, doscientos setenta *[está tratando de encontrar el número más próximo al 279]*, doscientos ochenta *[redondea 279 a 280]* ... y doy de abono ciento *[piensa en el 100 del 152]*...

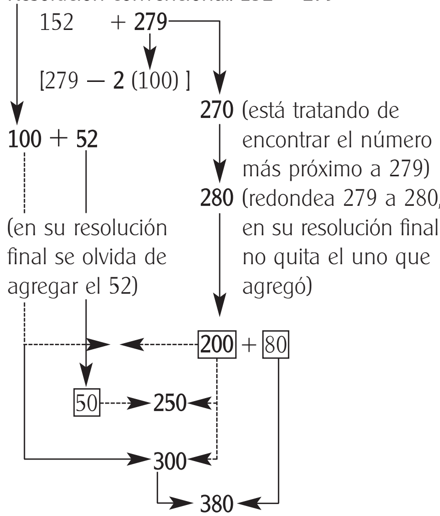
E. Ciento cincuenta y dos.

O. Cincuenta y dos *[no considera el 100 del 152 y los 52 los redondea a 50]* son... doscientos *[piensa en el 200 del 280 que ya había obtenido]*... ciento *[retoma el 100 del 152]*... doscientos cincuenta *[suma 200 del 280 con los 50 del 52]*, trescientos *[suma ahora el 200 del 280 pero con el 100 del 152]*, trescientos. ¿Debía trescientos ochenta *[recupera el 80 del 280 provenientes del 279, que suma a los 300 recién obtenidos]*?

(Delprato, 2002, p. 131)

*Reconstrucción del cálculo mental:*

Resolución convencional: 152 + 279




Motivos de *fracaso:* olvida agregar 52 y quitar el uno que agregó en el redondeo de 279 a 280

(380 + 52 − 1 = 431)

Uno de los motivos señalados de ineficacia e ineficiencia en el cálculo inicial de Olga, la ausencia de registro de datos, fue revertido mediante los avances ya mencionados en la representación escrita de los números.

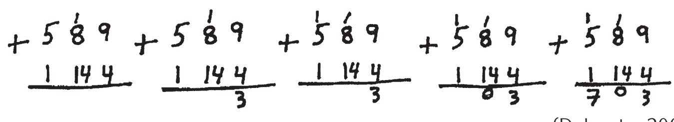
Asimismo, como se ha señalado, Olga inicia una interacción sistemática con *las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupamientos y desagrupamientos)* cuando realiza el juego de *El Cajero*. A su vez, el trabajo de registro en la tabla le permite tener experiencias que la aproximan a *los procedimientos algorítmicos de la suma y de la resta, tales como encolumnar y la dirección (de derecha a izquierda) más eficaz de resolución* cuando se opera en el plano de lo simbólico. La entrevistada reflexiona sobre la eficacia del procedimiento escrito cuando realiza los cálculos empezando en la columna de la derecha, ante la evidencia del error que le ocasiona operar comenzando por la columna de la izquierda. Para hacer evidente el error, la entrevistadora le sugería recuperar la tabla o evocar el contexto monetario. Logró, incluso, introducir los signos gráficos para identificar cada operación y el resultado e identificar también la ubicación espacial de los signos y de la raya indicadora del resultado, pudiendo después no sólo usar los signos, sino además reflexionar sobre este logro y su importancia:

> [...] y eso es lo que yo erraba en esos signos, éste [—] pues no le entendía. Éste [+] [...] sí sé que es para la suma y el que se me hacía difícil era éste [—] y el otro, el que es como una equis [...] lo único que ella [se refiere a su asesora en INEA] me explicó es que lo tenía que poner abajo [las cantidades una debajo de otra para realizar el algoritmo] [...] ya ahorita que me ha estado enseñando, bueno que usted me ha enseñado, éste me quedó así y digo: "¿para qué, para quitar o para poner?"

Al operar fuera de la tabla, ante la presencia de algunas dudas en torno al modo de representar los reagrupamientos, se incorpora también –como se hizo con Carmen– el algoritmo ampliado. Con el acompañamiento de la entrevistadora, le queda claro que escribir en una columna lo reagrupado es indicador de que es un sumando que debe ser agregado en dicha columna. Paulatinamente, logra mayor independencia, hasta incorporar el registro sugerido de manera autónoma y empieza a operar evocando por iniciativa propia el referente monetario. Por ejemplo, al resolver en el plano de lo simbólico 589 + 114:

> Umm ... nueve ... ¿trece pesos? [...] cambiaría los de a peso por de a diez *[anota el 1 arriba de las decenas]* quedan tres *[escribe 3 en las unidades]* diez monedas de a peso ... de a diez *[rectifica]* [...] las cambiaría [...] por un billete de cien, le pongo *[escribe 1 arriba de las centenas]* ¿cero? *[señala el lugar de las decenas, y lo anota]* Umm ... cinco, seis ... cinco, seis ¿siete? *[escribe 7 en el lugar de las centenas]*.

Sus anotaciones son:



(Delprato, 2002, pp. 115-116)

## SOFÍA

La ingeniería didáctica diseñada para trabajar con Sofía buscó proveerla de recursos para la rectificación, control y argumentación de su propio cálculo escrito, al dotar a su simbolización (de los números y de los algoritmos) de un referente.

La instauración de un referente como mecanismo de explicitación, reconocimiento y control de la lógica subyacente a dicha simbolización fue realizada en la intervención didáctica, dado que la entrevistada no empleaba al cálculo mental como recurso alternativo.

El referente propuesto entonces para la resolución de problemas aditivos fue el uso del dinero, por la familiaridad de la entrevistada con situaciones de cambio en este contexto.

El uso de este referente fue presentado en situaciones que procuraban familiarizar a Sofía con:

- Transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta.
- Develar las leyes de escritura de los números.
- Explicitar procedimientos algorítmicos.

A fin de propiciar la interacción de Sofía con las transformaciones implícitas en los algoritmos de la suma y la resta se recurrió, como con las otras mujeres, a la implementación del juego de *El Cajero*.

Asimismo, en el contexto del juego mencionado, se promovió la develación de las leyes de escritura de los números. Nuevamente, el uso del registro de las cantidades obtenidas en una tabla y su confrontación posterior con la escritura habitual de los números permitía hacer evidente el carácter posicional del SND. Además, como ya se mencionó, este reconocimiento de la lógica posicional de la representación escrita de los números demanda la aplicación de agrupamientos exhaustivos (que respeten la regla de cambio); exigencia que se mostró –también con Sofía– a través de la problemática de la presentación de cantidades representadas materialmente sin correspondencia con la escritura convencional. Así, la entrevistada reconoció la necesidad de aplicar los reagrupamientos para obtener una escritura convencional de una cantidad. Esta reflexión le dio también a Sofía la posibilidad de argumentar la transformación de "reagrupar" implícita en el algoritmo de la suma ("me llevo una"). De esta manera, cuando realiza la operación con contexto 258 + 185, al contar las monedas de \$10 manifiesta:

S. [...] Dos, cuatro, seis, ocho, diez. ¿Me puede cambiar éstas *[le entrega a la entrevistadora 10 monedas de $10]*?
E. ¿Por qué quieres cambiar?
S. Por un billete de a cien.
E. Ajá *[le entrega 1 billete de $100]*. Si no vas a tener el problema de la otra vez, ¿no?
S. Sí.
E. Que no lo podías escribir.

Finalmente, la tabla enfrentó también a Sofía con algunas componentes de eficacia de los algoritmos habituales, tales como: el sentido de la resolución de derecha a izquierda, que fue analizado en el contexto de la resolución de operaciones aditivas (con transformaciones) en la tabla. Se propuso probar también (al igual que con Carmen y Olga) por dónde iniciar el cálculo para no tener que borrar, esta inquietud se instaló por la evidencia del error que le ocasionaba operar en sentido de izquierda a derecha:

E. Volviste a borrar, ¿no?
S. Sí, porque tuve que cambiar.
E. Ajá. Hay una forma de evitar que uno borre.
S. ¿Cómo?
E. ¡Ah! Ya lo vamos a ver.
S. *[se ríe]*.

Al confrontar con los algoritmos convencionales, Sofía pudo vincular la resolución de derecha a izquierda como un procedimiento que permite evitar borrar, cada vez que hay una transformación (de reagrupamiento o desagrupamiento).

Posteriormente, se empleó otra vez el dinero como referente y el registro en la tabla, pero en el contexto ya no del juego sino de la resolución de problemas aditivos. Al confrontar los resultados obtenidos para un mismo problema haciendo uso de su algoritmo personal erróneo y del dinero y la tabla, se presentó una contradicción en Sofía. A partir de este conflicto generado, fue posible, paulatinamente, rectificar sus procedimientos de cálculo y argumentar estos nuevos procedimientos evocando las transformaciones explicitadas al emplear el referente.

En este proceso, dada la adhesión de Sofía a mecanismos de control simbólico, hubo menos resistencias que las observadas en Carmen para la adopción de un algoritmo ampliado diferente al que ella empleaba. Sin embargo, mostró más resistencia que Olga para usar el dinero como referente de explicitación y de argumentación de los algoritmos. En las entrevistas iniciales, Sofía nunca manifestó la evocación de ningún referente extraescolar para apoyar su cálculo y, de hecho, en las primeras experiencias con *El Cajero*, se mostró incómoda, no sólo porque se "estaba jugando" (sinónimo para ella quizás de pérdida de tiempo), sino, de manera más preocupante, porque no reconocía en sus posibilidades de cálculo con el dinero ningún conocimiento matemático válido. En cierto sentido, para Sofía "hacer matemáticas" estaba únicamente vinculado con lo simbólico (en su connotación escolar).

Esta valorización de lo simbólico permitió hacer algunos ajustes en las anotaciones marginales al promover la toma de conciencia de su uso como apoyo al procedimiento de resolución. Así, rectifica la anotación de "lo que me llevo" (lo escribía sobre el grupo donde se originaba) en la suma, abordando la importancia de encolumnar como estrategia para esclarecer el orden en el que opera el reagrupamiento; y en la resta, se validó el registro de los sucesivos desagrupamientos ("lo que pedí").

Ante la resistencia a la evocación del referente, la adopción del algoritmo ampliado de la suma y su rectificación se hizo inicialmente sólo en el plano de la escritura (si bien ya encolumnaba sobre el grupo al que afectaría el reagrupamiento, no lo aplicaba allí sino sobre el orden mayor –las centenas–). Por ello, al principio, aunque rectifica el encolumnar, persiste con el procedimiento de reagrupar todo en las centenas, como puede observarse en el siguiente algoritmo, pues en las centenas $4 + 3 + 2$ le da como resultado 9:

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 1\;1\;\phantom{6} \\ 4\;7\;6 \\ +\,3\;8\;8 \\ \hline 9\;6\;4 \end{array}$$

(Delprato, 2002, p. 122)

Luego corrigió el procedimiento, pero sólo recuperando el indicio gráfico que le proveía el ya encolumnar correctamente las anotaciones marginales ("sumo todo lo que está en una misma columna"). Es decir, toma conciencia del carácter orientador del algoritmo ampliado para la operatoria de la suma, pero tiene dificultades para argumentarlo porque no había operado con respaldo en la lógica subyacente al algoritmo, sino rectificando su creencia previa de "adónde llevar". O sea, persiste en la justificación desde el manejo de lo simbólico, "Porque lo tenía que poner ahí", sin acudir al referente sugerido, el del dinero:

E. Ahora, explícame una cosa, Sofía. ¿Por qué te llevas uno ahí *[señala el 1 escrito arriba de las decenas]*, por qué te llevas uno ahí *[señala el 1 escrito arriba de las centenas]*? ¿Qué quiere decir eso de que te llevas uno? No te estoy diciendo que esté mal. Quiero que me expliques qué es lo que quiere decir.
S. Porque aquí *[señala las unidades]* era... umm... nueve más dos, diez, once.
E. Once.
S. Y no lo puedo poner aquí *[señala las unidades en el resultado]*, lo puse acá *[señala el 1 escrito sobre las decenas]*.
E. ¿Por qué lo pusiste ahí?, a ver.
S. Porque lo tenía que poner ahí.

(Delprato, 2002, p. 123)

Su anotación es:

```
 1 1
 6 2 2 R=
+2 9 9
------
 9 2 1
```

Sofía no pudo argumentar este nuevo procedimiento hasta que venció su resistencia a evocar las situaciones de cambio con el dinero. Posteriormente, al visualizar la dificultad para justificar los reagrupamientos, empieza a reconocer que la sugerencia de utilizar el referente del dinero le permite controlar lo simbólico. Así, en la argumentación del reagrupamiento de decenas a unidades realizado en la cuenta anterior, recurre al dinero: "Porque aquí *[señala el 1 escrito sobre las decenas]* lo cambié por de a diez. No le puedo poner el número completo, así que..."

En cambio, la complejidad operatoria de una resta con desagrupamientos sucesivos (por ejemplo 700 – 378) le demandó, incluso para la rectificación del procedimiento y del algoritmo ampliado, la evocación del dinero como referente. Esta demanda de evocación se presentó ante la reiteración del error de su algoritmo (al confrontar "cuánto le daba" usando el dinero para el cálculo) y la imposibilidad de corrección anticipada de su cálculo escrito. Por ello, cuando resuelve con material (dinero), se logra poner en evidencia la ineficacia de su registro ampliado, el cual omite lo restante en cada agrupamiento afectado por desagrupamientos. Así, por ejemplo, en la revisión de la resta (700 – 137), cuando observa que ante la ausencia de monedas de $1 (unidades) debe cambiar un billete de $100, se le cuestiona que no ha registrado este cambio:

E *[...]* ¿Y anotaste ahí que en vez de ocho te quedó un billete menos?
S. *[Observa en silencio.]*
E. Cada vez que haces un cambio lo tienes que anotar.
S. ¡Ay! Sí. Cierto.
E. ¿Cuántos billetes te quedan ahora?
S. Entonces eran siete... *[tacha y escribe 7 arriba de las centenas].*

(Delprato, 2002, p. 124)

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} \overset{7}{\cancel{8}}'0'0 \\ -\;1\;3\;7 \\ \hline 7\;7\;3 \end{array}$$

A partir de estas evidencias, corrige su algoritmo ampliado y posteriormente logra rectificar su resultado. Por consiguiente, se puede advertir que el propósito de eficacia en el cálculo (evitar este error reiterado) fue posibilitando la instauración de la evocación del referente.

## CONCLUSIONES

El caso de Carmen muestra particularmente la importancia de tematizar, en una secuencia de trabajo de los algoritmos convencionales con adultos analfabetos, la confrontación de estrategias ágrafas y escritas de resolución mediante la reflexión sobre su vínculo con la eficacia en la resolución en determinados niveles de dificultad operatoria, dotando a la vez de un dominio del cálculo escrito como estrategia alternativa propuesta.

De este modo, el algoritmo escrito e, incluso, el algoritmo ampliado logran instalarse como recursos frente a una búsqueda de eficacia en el cálculo, ante la evidencia de los límites de las estrategias ágrafas por su demanda de retención de información y de control continuo sobre esta retención. Para ello, es importante poner a los adultos en situación de aprendizaje de este mecanismo sustituto o alternativo de la memorización, pero fundamentalmente la intervención didáctica debe propiciar que vayan elaborando criterios de argumentación y control del cálculo escrito que permitan la optimización de una buena competencia operatoria inicial, como la de Carmen, y, simultáneamente, la generalización de dicha competencia a rangos numéricos mayores.

Esta construcción de los mecanismos simbólicos de cálculo y su instauración como modos simbólicos eficaces de calcular permiten que los sujetos se apropien del *sentido* de esta simbolización, en tanto el sentido de un conocimiento (según Brousseau) se define:

> [...] no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etcétera (citado por Panizza, 2003, p. 39).

Por otro lado, la presentación del caso de Olga ilustra cómo los limitados alcances de su cálculo mental generaron una disposición favorable hacia el aprendizaje de estrategias escritas de cálculo, involucrándola en la construcción de mecanismos de simbolización y de cálculo cuyo sentido se cimienta, así, en la búsqueda de mayores niveles de eficacia y eficiencia en la resolución. Es decir, este caso muestra la importancia de considerar los tipos de nociones previas y sus posibles incidencias como recursos que facilitan la extensión de lo sabido a nuevas situaciones con nuevas dificultades.

Para Olga, la intervención didáctica permitió que el algoritmo escrito (incluso el ampliado) se instalara como recurso alternativo eficiente y eficaz frente a su limitado cálculo mental por sus dificultades en la retención de información (debido a la ausencia de registro de los datos), agudizadas por la necesidad de control continuo sobre esta retención.

Finalmente, la intervención diseñada descrita y las particularidades esbozadas de las respuestas de Sofía a dicha intervención dan cuenta de la relevancia de obturar, en una secuencia de enseñaza, recursos de los sujetos sustentados en una sobrevaloración de mecanismos simbólicos de control del cálculo. En la experiencia, esto fue posible al instalar un referente concreto, al manipular la complejidad operatoria (es decir, proponer cálculos con sucesivas transformaciones) y al establecer como parte del contrato didáctico la obligación del alumno de explicar y argumentar sus procedimientos.

Estas variables demandaban de Sofía el dominio de la lógica subyacente de sus procedimientos de cálculo e, incluso, la rectificación de sus procedimientos previos erróneos y arbitrarios. Para ello, fue necesario que Sofía fuera venciendo sus resistencias respecto al uso de un referente de lo simbólico (el dinero) como recurso para explicitar, reconocer y controlar la lógica de los procedimientos algorítmicos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995), "Ingeniería didáctica", en P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* México, Iberoamérica, pp. 33-59.

Ávila, A. (1990), "El saber matemático de los adultos analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo", *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos,* México, Centro de Estudios Educativos, vol. XX, núm. 3, pp. 55-95.

—— (1997), "Repensando el currículo de matemáticas para la educación de adultos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, pp. 101-118.

Ávila, A. y G. Waldegg (1994), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos,* México, INEA.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1997), *En la vida diez, en la escuela cero,* 4a. ed., México, Siglo XXI.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la mathématiques", *Recherches en didactique de mathématiques,* Bourdeaux, La Pensée Sauvage, vol. 7, núm. 2, pp. 33-116.

Delprato, M. F. (2002), *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática,* Tesis de Maestría en Ciencias, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Delprato, M. F. e I. Fuenlabrada (2003a), "EL CAJERO. Un recurso didáctico que favorece el acceso de los adultos analfabetos a la simbolización de los números y las operaciones de suma y de resta", *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos,* México, CREFAL, primavera, pp. 37-40.

—— (2003b), "Carmen, alcances y limitaciones de su cálculo mental", Informe de investigación presentado en la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 17), organizada por el CLAME en Santiago de Chile, 21 a 25 de julio.

Ferreiro, E., I. Fuenlabrada, M. Nemirovsky, D. Block y M. Dávila (1987), "Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados", México (Documento publicado en versión rústica DIE-Cinvestav).

Ferreiro, E. (1998), *Alfabetización. Teoría y práctica,* México, Siglo Veintiuno Editores.

Fuenlabrada, I., D. Block, H. Balbuena y A. Carvajal (1991), *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* México, Libros del Rincón, SEP.

Fuenlabrada, I. y M. F. Delprato (2003a), "Olga, desde su cálculo mental dialoga con los números y las cuentas", Informe de investigación presentado en la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 17), organizada por el CLAME en Santiago de Chile, 21 a 25 de julio.

—— (2003b), "Sofía, posibilidades y límites de un cálculo escrito arbitrario", en *Memorias electrónicas del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa,* México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE).

Lerner, D. y P. Sadovsky (1994), "El sistema de numeración: un problema didáctico", en C. Parra e I. Sáiz (eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós, pp. 95-184.

Mariño, G. (1986), *Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular (Constataciones y propuestas),* Bogotá, Dimensión Educativa.

—— (1997), "Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, (pp. 77-100).

Panizza, M. (2003), "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática", en M. Panizza (comp.), *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós, pp. 31-57.

Soto, I. (1997), "Algunas proposiciones sobre la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de jóvenes y adultos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, pp. 119-130).

Valiente, S. (1995), "Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigaciones de campo con adultas analfabetas", *Educación Matemática,* México, Iberoamérica, vol. 7, núm. 2, pp. 60-73.

Vergnaud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad,* México, Trillas.

## DATOS DE LAS AUTORAS

**Irma Fuenlabrada**
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
irfuen@mail.cinvestav.mx

**María Fernanda Delprato**
Facultad de Filosofía y Humanidades de la UNC, Argentina
ferdelprato@hotmail.com

# La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?

**Leonor Camargo, Patricia Perry y Carmen Samper**

**Resumen**: En este artículo se parte de la premisa de que la enseñanza de la demostración en geometría, desde una concepción amplia, implica la construcción de un entorno de aprendizaje especial. Un componente fundamental de este entorno son las tareas que propician el desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental, ligado particularmente a la demostración. En una experiencia de aula realizada en el nivel universitario, se evidencia que el enunciado de las situaciones da lugar a diferentes tareas que pueden afectar la actividad demostrativa en aspectos relacionados con la anticipación de la respuesta, el proceso hacia una justificación y la propia justificación.

*Palabras clave:* actividad demostrativa, tarea con instrucciones, anticipación de la respuesta, visualización, exploración, conjetura, explicación, prueba, demostración formal.

**Abstract:** An ample conception of proof as a parameter for teaching how to prove implies the construction of a special learning environment. Tasks that foster the development of conceptual and procedimental knowledge, related to proof, constitute a fundamental component of this environment. In a classroom experience carried out with university students, there is evidence that the way a problem is stated gives rise to different tasks that can affect students' performance when a proof is required, in aspects related to the anticipation of a solution, the process towards a justification and the justification itself.

*Keywords:* demonstrative activity, instructional task, anticipation, visualization, exploration, proof, formal proof.

Fecha de recepción: 6 de diciembre de 2004.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la actividad de los estudiantes en los cursos de matemáticas de casi todos los niveles educativos en torno a la demostración se ha reducido de manera considerable y, en algunos casos, ha desaparecido del currículo realizado. Aunque este hecho depende de acciones del profesor como individuo, la didáctica de las matemáticas como disciplina científica nos impulsa a buscar sus causas en el marco de las organizaciones actuales de las matemáticas escolares propuestas en el ámbito internacional, más que en decisiones aisladas y locales de los profesores, quizás motivadas por el desconcierto y la incertidumbre que les produce abordar la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes para comprender qué es una demostración y cómo realizarla. Vemos entonces el hecho en cuestión como uno más de los fenómenos didácticos (Gascón, 1998), producto de decisiones pedagógicas fallidas –tomadas en el ámbito institucional– que, en su pretensión de resolver el problema del fracaso escolar en matemáticas, lo que han logrado es una disminución significativa de la actividad matemática genuina en el aula escolar.

Desde la perspectiva de las matemáticas, eliminar la actividad de los alumnos en torno a la demostración no es una decisión acertada, pues implica desconocer que la demostración es una característica esencial de las matemáticas. Tampoco lo es desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, pues implica desconocer que la formación matemática de un individuo incluye no sólo el desarrollo de competencias específicas, sino también la consolidación de una concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se validan sus construcciones, concepción que se logra mediante la experiencia del quehacer matemático.

Dar el papel protagónico que le corresponde a la demostración en los cursos de matemáticas requiere una serie de acciones de diversa índole cuidadosamente planeadas, realizadas de manera articulada y sistemática, y monitoreadas y evaluadas con cierta frecuencia, a fin de determinar su grado de eficacia y realizar los ajustes necesarios para lograr el resultado que se busca. Tales acciones conciernen a diversos actores de la comunidad educativa de las matemáticas: investigadores, profesionales responsables de políticas educativas, diseñadores de currículo, profesores en ejercicio y formadores de profesores.

En calidad de formadoras de profesores de matemáticas, llevamos a cabo una experiencia de investigación,[1] a fin de describir la actividad de los estudiantes

[1] La experiencia se realizó en el marco del proyecto Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas, DMA 016-03, el cual contó con el apoyo financiero del Depar-

asociada a la realización de una tarea, experiencia que podría aportarnos información para apoyar la hipótesis, según la cual, es posible dar a la demostración su papel protagónico en un curso de geometría si:

- La actividad demostrativa se concibe desde una perspectiva amplia que vincula procesos previos a la producción de justificaciones con la producción de éstas.
- Las tareas propuestas a los estudiantes requieren que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa.
- El ambiente que se propicia en la clase estimula la actividad demostrativa en concordancia con la concepción propuesta.

La experiencia se desarrolló en el espacio académico Geometría Plana de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, durante el primer semestre lectivo de 2004. El curso tenía dos intenciones generales: impulsar el desarrollo de la competencia demostrativa de los estudiantes en el marco de la constitución de un sistema axiomático de la geometría euclidiana, y contribuir a formar en ellos una concepción amplia de demostración que les permita ver el papel que ésta puede desempeñar en la formación matemática de estudiantes de secundaria, ámbito de su futuro desempeño profesional. Una de las profesoras investigadoras era la profesora responsable de la asignatura.

En una sesión de trabajo de dos horas durante la tercera semana del semestre académico, los estudiantes del curso, distribuidos en cinco grupos, se involucraron en una actividad para resolver una tarea preparada por el grupo de investigación. En realidad, se asignó una tarea diferente a cada grupo, pero las cuatro tareas estaban asociadas al mismo hecho geométrico. En este artículo, relatamos esa experiencia, explicitando inicialmente nuestra manera de concebir la actividad demostrativa; luego aludimos a tres factores importantes en la constitución de un ambiente favorable a la actividad demostrativa; posteriormente, presentamos algunas consideraciones que se tuvieron en cuenta en el diseño de las tareas propuestas; precisamos algunos aspectos metodológicos; y destacamos rasgos de la producción de los distintos grupos que nos dan indicios de una actividad demostrativa de parte de los estudiantes, actividad que, en todo caso, se percibe de mayor o menor riqueza, dependiendo de la tarea que se estaba resolviendo.

---

tamento de Matemáticas y del Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. El grupo de investigación estuvo constituido por las autoras del artículo y Clara Emilse Rojas Morales.

## ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA: NUESTRA PERSPECTIVA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

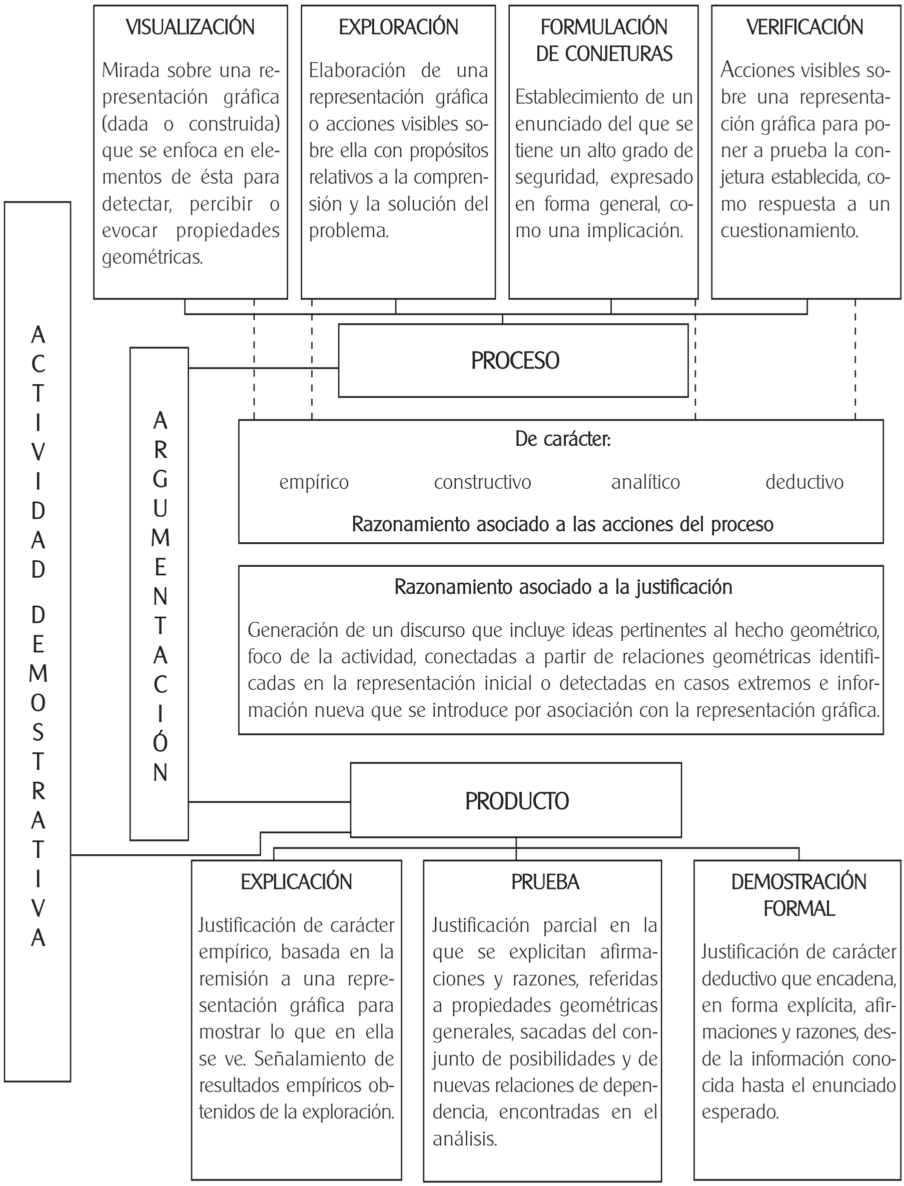
Una concepción restringida de demostración privilegia, como función primordial de ésta, la validación de enunciados matemáticos y hace énfasis en la producción de demostraciones formales, atendiendo a los cánones de la comunidad matemática. Esta visión es de poca utilidad para la didáctica por cuanto en la escuela la matemática en sí misma no es objeto de investigación, sino objeto de enseñanza. Está de por medio un estudiante que no forma parte de la comunidad de matemáticos y que, por su edad y su experiencia previa, valida el conocimiento de manera muy distinta a la empleada por los matemáticos, por lo cual esta última le resulta poco significativa.

Por el contrario, una perspectiva amplia reconoce que, a lo largo de la historia del desarrollo de las matemáticas, se encuentran pruebas de que la demostración ha cumplido otras funciones, como la de ser herramienta para la comprensión. Advertir esto sugiere la posibilidad y la conveniencia de redimensionar el papel que se le asigna a la demostración. Una concepción, con la que estamos de acuerdo, propone que la demostración tiene otras funciones. Al respecto, De Villiers (1993, pp. 15-30) identifica la demostración como medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización de resultados. Teniendo en cuenta propuestas de diversos autores (Bell, 1976; De Villiers, 1990, 1999; Hanna y Jahnke, 1996; citados en Hanna, 2001, pp. 5-23), afirmamos que dos propósitos de la demostración en matemáticas son: proporcionar comprensión y conocimiento, y ser un recurso para la validación. Es ahí donde debe buscarse el potencial didáctico de la actividad demostrativa en el contexto escolar.

Entendemos que en la actividad demostrativa se combinan dos aspectos estrechamente relacionados: el proceso y el producto. El proceso incluye acciones propias de la heurística, como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, siempre y cuando movilicen el razonamiento hacia la búsqueda de validación, den significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y provean los elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones. El aspecto producto incluye acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones formales. El cuadro 1 presenta una descripción esquemática de lo que el grupo de investigación ha concebido como actividad demostrativa para la educación en matemática.

Ante un problema que despierte el interés, las acciones implicadas en el pro-

**Cuadro 1** Descripción esquemática de la actividad demostrativa



ceso de la actividad demostrativa (véase parte superior del cuadro 1) activan el razonamiento, poniendo en juego conocimientos previos, ideas nuevas que surgen de la experiencia y argumentos de carácter diverso (*e.g.*, empírico, constructivo, conjetural, analítico o deductivo), que permiten recopilar elementos o ideas para construir un discurso, ante la necesidad de convencerse o convencer a otros de la validez de un enunciado que genere una explicación, una prueba o una demostración formal. De las acciones implicadas en el aspecto producto de la actividad demostrativa, la que se identifica como demostración formal (véase esquina inferior derecha del cuadro 1) es tan sólo una de las formas de justificación, quizás la más sofisticada y a la que no necesariamente todos los estudiantes deben llegar. Si se tiene una visión restringida de la demostración y sólo se la concibe de esta manera, se reduce mucho el universo de posibilidades de actividad matemática de nuestros alumnos.

Al ligar acciones de carácter heurístico con la necesidad de justificar y con la propia producción de una justificación, se busca establecer un equilibrio entre la lógica de la validación, que está vinculada a la manera como avanza la construcción del universo matemático, y la lógica del descubrimiento, que está en estrecha relación con la manera como aprenden lo seres humanos. De este modo, se pretende responder a un aspecto problemático de la didáctica: considerar y articular en la enseñanza dos formas distintas de producción de conocimiento. Una, centrada en la naturaleza de las matemáticas, que requiere y favorece actividades de aula, cuyo propósito principal es la construcción de aspectos estructurales de los conceptos y propiedades matemáticos y en las que el principal recurso de validación es la producción de una cadena deductiva de proposiciones. La otra, centrada en la naturaleza de la cognición del estudiante, que requiere y favorece actividades de clase, en las que se hace una inducción empírica de lo particular a lo general, como forma de buscar regularidades, y mediante las cuales se organiza la experiencia de los estudiantes, al establecer relaciones entre los conceptos y la realidad que éstos reflejan, atribuir significado a los conceptos y justificar afirmaciones.

## UN ENTORNO FAVORABLE PARA LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Un primer factor en la búsqueda de un ambiente de aprendizaje para lograr el equilibrio descrito concierne a la constitución interactiva de unas normas que permitieron que la profesora y los alumnos del curso en el que se hizo la experimentación entraran en una dinámica colectiva asociada a la demostración. Algunas de tales normas tienen que ver con:

- Valorar y fomentar el cuestionamiento de las afirmaciones de la profesora, de los alumnos y del libro, como un mecanismo para enriquecer la comprensión del contenido estudiado.
- Usar, como mecanismo para el desarrollo del contenido del curso, la discusión matemática[2] (Bartolini, 1996, 1999, citados en Mariotti, 2001, pp. 25-53), apoyada en la preparación previa del tema en cuestión por parte de los alumnos.
- Establecer la demostración formal como la autoridad para aceptar e incluir un resultado dentro del sistema axiomático en vía de construcción.

Un segundo factor del entorno estuvo constituido por la presencia de la calculadora con el *software* Cabri de geometría dinámica, como recurso para comprobar o indagar hechos geométricos. Un tercer factor fue la implementación de situaciones especiales, diseñadas por el grupo de investigación, con las que se pretendía la revisión, consolidación y aplicación de los contenidos en juego y el uso de la geometría dinámica en el proceso de la actividad demostrativa.

## LAS TAREAS PROPUESTAS: ALGUNAS CONSIDERACIONES

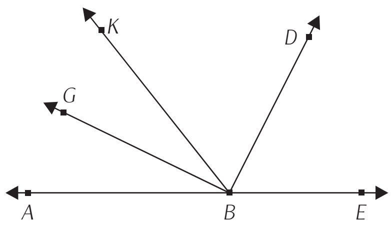
El contenido geométrico central, común a las tareas propuestas que conformaron la experiencia que estamos relatando, es la relación entre las bisectrices de ángulos que forman par lineal. Esta relación se estudia en el cuarto capítulo del texto[3] que se utilizó en el curso; en dicho capítulo, se enuncian los postulados relativos a ángulos, se formulan las definiciones y se trabajan los primeros resultados correspondientes. En el momento de la experimentación, los estudiantes conocían los elementos iniciales del sistema axiomático, estaban aprendiendo a manejar la calculadora con el programa de geometría dinámica y estaban asimilando lo que se esperaba que fuera su papel y el de la profesora en el ambiente de aprendizaje que se estaba constituyendo en el aula.

[2] Se refiere a la interacción verbal, guiada por la profesora, en el proceso de construcción social del conocimiento, con la cual se busca propiciar la evolución de un hecho matemático desde la percepción personal hacia la perspectiva teórica.

[3] E. Moise y F. Downs (1970), *Geometría moderna*, Massachussets, Addison-Wesley.

**Cuadro 2** Formulación de la tarea 1 (tomada de Moise y Downs (1970, p. 94)

En el semiplano $H$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos, $\angle ABG \cong \angle KBG$ y $\angle KBD \cong \angle DBE$. Halle $m\angle GBD$. [Sugerencia: Sean $m\angle ABG = x$ y $m\angle DBE = y$.]




Una de las tareas propuestas en la experimentación, la tarea 1, se presenta en el cuadro 2; su formulación es la correspondiente al libro. Desde nuestra perspectiva, esta tarea pone en juego la aplicación de un proceso rutinario de cálculo algebraico, actividad matemática pobre con la cual no se estimula la actividad demostrativa; aun así, quisimos proponerla a un grupo para ver en qué consistía la actividad de los estudiantes para resolverla.

La formulación de las otras tres tareas estuvo guiada de manera general por las siguientes dos ideas. En primer lugar, decidimos que el enunciado de las demás tareas debía incluir instrucciones específicas que demandaran acciones de los alumnos encaminadas al aspecto producto de la demostración. Así, la instrucción para los estudiantes solicitaba, además de la pregunta central del problema, de manera explícita:

- Anticipar la respuesta, es decir, dar una idea intuitiva inicial de la solución para la situación presentada que no fuera resultado de una exploración o de un análisis, sino de los conocimientos y el razonamiento que evoca la lectura del problema.[4]
- Formular el teorema, es decir, expresar en forma de *si… entonces…* la conjetura obtenida al realizar las acciones del proceso de la actividad demostrativa, a fin de facilitar la producción de la justificación.
- Elaborar la justificación correspondiente, partiendo de los axiomas, definiciones y proposiciones del sistema en construcción.

[4] Pedir la anticipación es una estrategia didáctica que consideramos útil, ya que no sólo invita a una lectura comprensiva del enunciado del problema, sino que puede ser el motor que impulsa las acciones del proceso de la demostración. Mientras se invite de manera sistemática a los estudiantes a hacer uso de esta estrategia, ellos la irán convirtiendo en estrategia personal para el abordaje de situaciones, apropiándose así de un instrumento poderoso para el trabajo con las ideas que se ponen en marcha al leer el enunciado.

En segundo lugar, con referencia a la tarea 1, decidimos que las otras tres tareas, tanto en la descripción de la situación que delimita el asunto por tratar como en la pregunta que plantea la meta de la tarea, las acciones de los estudiantes debían conducir hacia el proceso de la actividad demostrativa y, por esta vía, lograr mayor riqueza en su quehacer matemático. En aras de explorar el efecto que pudieran tener en la actividad demostrativa de los estudiantes las diferencias en las formulaciones, surgieron tres reformulaciones del problema de la tarea 1, las cuales se presentan a continuación junto con las consideraciones que las determinaron.

En la tarea 1, al pedir que se halle la medida del ángulo formado por las bisectrices, se sugiere que ésta es siempre la misma, hecho que muy probablemente inhibe la necesidad de considerar varios casos para encontrar la respuesta. Esto, a su vez, limita mucho las acciones de visualización y exploración, centrales en la actividad demostrativa. Esta consideración nos hizo enfocar la atención en la búsqueda de una pregunta que impulsara tales acciones en el proceso de solución y nos condujo a eliminar la representación gráfica en la presentación de la situación. Esto último con dos propósitos: por un lado, obligar al estudiante a hacerla y tener así un mecanismo para verificar su interpretación de los objetos geométricos involucrados que mostrara su comprensión de ellos y, por otro lado, abrir las posibilidades de exploración. La reformulación que surgió de estas consideraciones se presenta en el cuadro 3; ella formó parte de la tarea 2, que se completó con las instrucciones antes mencionadas.

Con respecto a esta reformulación, se discutió si realmente induciría al uso del potencial dinámico de Cabri. Puesto que un objetivo del proyecto de investigación que enmarca el presente estudio es determinar si los alumnos ganan en herramientas para su actividad demostrativa al hacer uso del "arrastre"[5] de los objetos de la construcción, se decidió establecer otra reformulación del proble-

**Cuadro 3** Problema reformulado para la tarea 2

Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima?

[5] Herramienta que permite seleccionar los objetos de la construcción para moverlos por la pantalla con cierto grado de libertad, el cual se relaciona con la manera como fueron construidos y la dependencia que los objetos tengan unos con otros.

**Cuadro 4** Problema reformulado para la tarea 3

Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. Determinen cómo varía la medida del $\angle GBD$ cuando varía la posición de $\overrightarrow{BK}$.

ma (véase el cuadro 4), en la que se puso el acento en el estudio de la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices, cuando la posición del $\overrightarrow{BK}$ varía; ésta se usó para constituir la tarea 3.

Al imaginar algunos de los experimentos que se podrían llevar a cabo para estudiar la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos cualesquiera (o por las rectas que las contienen), surgió una nueva reformulación del problema (véase el cuadro 5), encaminada a dejar en libertad a los alumnos para explorar cualquier par de ángulos cuyas bisectrices resultaran perpendiculares; ésta se utilizó en la tarea 4.

**Cuadro 5** Problema reformulado para la tarea 4

En el tablero de una clase de geometría estaba escrito el enunciado incompleto de un teorema: *Si dos ángulos ________ entonces sus bisectrices son perpendiculares.*

Completen el enunciado.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Al quedar configuradas cuatro tareas diferentes, decidimos aplicarlas todas y contrastar las producciones de los estudiantes en relación con la actividad desplegada por cada grupo al realizar la tarea. En el momento de la experimentación, se distribuyeron los alumnos del curso en grupos de tres o cuatro personas, haciendo el esfuerzo de agrupar personas con desempeños académicos similares. Cada estudiante tenía a su disposición una calculadora graficadora con el programa Cabri, además de instrumentos de trazo como compás, regla y escuadra, de los que podían disponer a voluntad. En este artículo, se analiza el trabajo realizado por cinco grupos, de ahora en adelante referidos como GA, GB, GC, GD y GE, a los que se les asignó, respectivamente, las tareas 1, 2, 3, 4 y 4.

Para describir la actividad de los grupos, usamos como fuente de información las transcripciones de las grabaciones de audio realizadas durante el trabajo, las notas de campo de las observadoras –cuatro de los grupos contaron con la presencia de una persona del equipo de investigación en calidad de observadora, quien tenía el encargo de solicitar a los estudiantes, cuando lo creyera indispensable, que precisaran las ideas que estaban exponiendo; en el otro grupo se sustituyó la presencia de un observador por una grabación en video– y las producciones escritas de los grupos. Naturalmente, la descripción que hicimos de la actividad de los estudiantes se considera desde la perspectiva de lo que concebimos que es la actividad demostrativa y tiene en cuenta las acciones solicitadas por las instrucciones que se incluyeron en tres de las tareas.

## DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE LOS GRUPOS AL DESARROLLAR LA TAREA PROPUESTA

La descripción y el análisis se enfocan en cuatro asuntos: la anticipación de la respuesta, las acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa, las vías de construcción de la justificación y las producciones correspondientes al aspecto producto.

### ANTICIPACIÓN DE LA RESPUESTA

En el cuadro 6 se registra lo relativo a la anticipación de la respuesta en cada grupo. En dos de los grupos no hubo oportunidad para que al menos uno de los integrantes anticipara de manera espontánea una respuesta; este hecho está conectado con la tarea. En la tarea 1, al incluir una representación gráfica de la situación, que es muy improbable no tener en cuenta durante la lectura, se proporciona información visual que, además de ayudar a interpretar el problema,

**Cuadro 6** Anticipación de la respuesta

| | |
|---|---|
| *GA* | No se les pidió anticipar, ni lo hicieron. |
| *GB* | "La medida de éste $[\angle GBD]$ será máxima, si el $\overrightarrow{BK}$ está mucho más cerca a $\overrightarrow{BE}$". |
| *GC* | No hubo anticipación. |
| *GD* | "Los ángulos forman par lineal". |
| *GE* | Hicieron varias anticipaciones, producto de la adivinación. |

sugiere relaciones geométricas. En particular, insinúa la respuesta al problema, ya que la medida que se pide es una muy especial,[6] susceptible de ser determinada a partir de una buena representación gráfica; es decir, la pregunta planteada, acompañada por una representación gráfica de la situación, resta sentido a la estrategia de anticipar una respuesta. En la tarea 3, a pesar de pedir explícitamente una anticipación, hay dos elementos que parecen influir en el proceder de los estudiantes. La palabra "variación", concepto no familiar para ellos, les impone la necesidad de explorar para entender el problema; además, la pregunta de cómo varía la medida de un ángulo al variar la posición de un rayo, los obliga a estudiar casos. Es decir, la necesidad y pertinencia de hacer una especie de experimento en el que se examine el comportamiento de una de las variables que entran en juego, cuando se hacen cambios sobre la otra variable, lejos de invitar a anticipar de manera espontánea una respuesta, invita más bien a un estudio detenido de la situación.

En los otros grupos, al menos uno de los integrantes anticipó una respuesta que efectivamente fue motor de las acciones posteriores, no sólo de quien la enunció, sino de sus compañeros. Tanto en la tarea 2 como en la tarea 4, el respectivo enunciado sugiere como aceptable anticipar una respuesta muy puntual, que bien puede corresponder a una intuición o a una adivinación. Específicamente, la tarea 2 propició que saliera a flote una idea intuitiva, a saber, que entre más se acerque el rayo a una determinada posición, mayor será la medida del ángulo. Lo que se pide en la tarea 4, completar un enunciado de tal manera que sea verdadero lo que éste afirma, al parecer constituyó un reto que impulsó a GE a adivinar más que a explicitar su intuición al respecto; esto se ve claramente en el siguiente fragmento del protocolo del grupo.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Jairo: | Tenemos que completar: Si dos ángulos son no se qué, sus bisectrices son perpendiculares. Tienen que ser suplementarios. [Dibujan ángulos que forman par lineal para ilustrar.] |
| 3-6 | | [...] |
| 7 | Jairo: | Leamos a ver si dice: si dos ángulos de un triángulo... |

[6] Para aclarar este punto, piénsese en cómo podría variar la demanda cognitiva que impone la tarea si ella se refiere a dos ángulos adyacentes que no forman par lineal; se da una representación gráfica y la pregunta sigue siendo determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los dos ángulos. En particular, piénsese en la posibilidad de obtener la respuesta con sólo mirar la gráfica.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | Gabriel: | No. No dice eso; pero nosotros podríamos completarlo así. Por ejemplo: si dos ángulos de un triángulo son agudos entonces... |
| 9 | | [...] |
| 10 | Gabriel: | Si tenemos un par lineal y los ángulos son congruentes, las bisectrices son perpendiculares. |

## Acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa

En el cuadro 7 se presenta una breve descripción de las acciones relacionadas con el proceso demostrativo de cada uno de los grupos.

### *Visualización*

En los cinco grupos, la actividad de los estudiantes para desarrollar la tarea estuvo apoyada por la visualización y, aunque podría parecer que esta acción no estuvo vinculada de manera especial a la tarea propuesta, algunos elementos que ayudan a caracterizarla como parte del proceso demostrativo indican lo contrario. Al incluir una representación gráfica correspondiente a una descripción no sintética[7] de la situación, la tarea 1 indujo a GA a utilizar dicha representación. En efecto, a medida que iban leyendo el enunciado, con el propósito de comprender la situación que éste plantea, los estudiantes utilizaron la figura para visualizar, es decir, en términos de uno de los integrantes de GA, para "sacar conclusiones de lo que se puede observar en la figura". Por ejemplo, reconocieron la descripción hecha verbalmente (*e.g.*, la figura está constituida por rayos y ángulos; hay dos pares de ángulos adyacentes congruentes), sacaron información (*e.g.*, la suma de las medidas de los cuatro ángulos es 180°), determinaron relaciones geométricas (*e.g.*, el $\angle GBK$ es la mitad del $\angle KBD$), y percibieron el hecho que guió posteriormente el trabajo (*i.e.*, el $\angle GBD$ es recto). Cabe advertir que el enunciado, además de inducir a la visualización, la restringió al gráfico propuesto. Así, a

[7] Con tal calificativo pretendemos señalar la diferencia entre un enunciado expresado en términos de objetos y uno expresado en términos de las propiedades de dichos objetos. Una descripción sintética de la situación podría ser algo como: "Sean dos ángulos que forman par lineal. Hallen la medida del ángulo cuyos lados son las bisectrices de los ángulos dados". En la descripción dada por la tarea, es necesario desentrañar información y combinarla para poder llegar a la esencia de la situación, es decir, para advertir el hecho geométrico.

**Cuadro 7** Descripción resumida de las acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa de los grupos A, B, C, D y E

| | Visualización | Exploración | Conjetura | Verificación |
|---|---|---|---|---|
| GA | Limitada al gráfico propuesto. | De carácter algebraico. | "El $\angle$GBD es recto." | Algebraicamente, resolviendo ecuaciones. |
| GB | Estudio de dos tipos de bocetos: ángulos que forman par lineal y triángulo inscrito en una semicircunferencia. | De carácter geométrico a partir del estudio de casos en situaciones extremas: $\overrightarrow{BK}$ perpendicular a los rayos opuestos, el $\angle$BAK muy agudo o muy obtuso. | "No importa como coloquemos a $\overrightarrow{BK}$, la medida del ángulo formado por las bisectrices será 90°." | Construcción con regla y compás de la situación, asignación de medidas para la comprobación numérica y uso de la escuadra para verificar perpendicularidad. |
| GC | Uso de representaciones con regla y compás de ángulos que forman par lineal, con $\overrightarrow{BK}$ en posiciones cercanas a la perpendicular y en la calculadora, colocando los rayos opuestos en diferentes posiciones. | De carácter variacional. Con papel y lápiz, determinando dependencia entre la variación de las posiciones de las bisectrices y la de $\overrightarrow{BK}$. Con la calculadora, referida a la relación entre la posición de $\overrightarrow{BK}$ y la medida del $\angle$GBD. | "Independientemente de si se mueve $\overrightarrow{BK}$, la medida del $\angle$DBG no varía." | Con la calculadora, considerada como herramienta fiable, a través del arrastre de $\overrightarrow{BK}$. |
| GD | Uso de dos dibujos para comprobar la anticipación. En uno de los gráficos están las medidas de los ángulos. | De carácter geométrico sobre ángulos suplementarios no par lineal y par lineal, uno de los cuales es el caso de $\overrightarrow{BK}$ perpendicular. | "Si dos ángulos son par lineal, entonces sus bisectrices son perpendiculares." | No hubo. |
| GE | Construcción con regla y compás de un triángulo equilátero y sus bisectrices y de ángulos que forman par lineal, con rectas como bisectrices. Bocetos de ángulos suplementarios, no par lineal o par lineal. | De carácter geométrico. Con regla y compás, explorando triángulos especiales y ángulos suplementarios par lineal o no, además del caso especial en el que $\overrightarrow{BK}$ es perpendicular a los otros dos rayos. Con calculadora, para ver si las bisectrices son perpendiculares. | "Si dos ángulos son suplementarios, sus bisectrices son perpendiculares". | No hubo. |

diferencia de los otros grupos, al no generar otras representaciones que ampliaran la imagen conceptual del grupo, GA se enfrentó a la problemática de definir cuál información leída del gráfico era válida y cuál no, como se puede ver en el siguiente fragmento del protocolo.

| | | |
|---|---|---|
| 93 | Yolanda: | El $\angle KBG$ es la mitad del $\angle KBE$. |
| 94 | Mariela: | De verdad, no me parece. Éste me parece más pequeño. |
| 95 | Observadora: | Pero, ¿por qué no te parece? ¿Por lo que estás viendo ahí? |
| 96 | Mariela: | Sí, por lo que estoy viendo ahí. |
| | Observadora: | ¿Y tú crees que ese dibujo necesariamente te va a mostrar la realidad de la situación? |
| 98 | Yolanda: | Ah, ¡no! Así como decimos que ahí se ve un ángulo recto. No sabemos. |

GB aprovechó la visualización más como recurso para buscar la justificación que para llegar a la conjetura, pues la estableció muy rápidamente y sentía seguridad respecto de ella. Como la tarea les exigió hacer la justificación, el trabajo se centró en la búsqueda de relaciones geométricas de los ángulos que se generan en las diferentes representaciones al modificar la posición de $\overrightarrow{BK}$, e incluso en la búsqueda de triángulos de los que pudieran extraer información para la justificación como, por ejemplo, un triángulo inscrito en una semicircunferencia. Esto último porque recordaban que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto y, como lo expresan dos estudiantes:

| | | |
|---|---|---|
| 79 | Fabio: | Tendríamos que hacer una demostración y yo estoy tratando de hacer una por medio de ángulos en triángulos. |
| 80 | Talía: | Yo apoyo a Fabio con lo del triángulo, porque eso es una buena forma de demostrarlo. |

En el caso de GC es evidente que la tarea 3 determinó tanto la necesidad de visualizar como el resultado de tal acción. Puesto que el enunciado de la tarea invita a estudiar la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices, GC utilizó, como recurso de exploración, diversas representaciones obtenidas al modificar la posición de $\overrightarrow{BK}$ respecto de la perpendicular; además, por iniciativa propia, utilizaron el programa de geometría dinámica de la calculadora para hacer el estudio mencionado, con lo que lograron ver la generalidad del hecho geométrico en cuestión.[8] Esto los llevó a desviarse de su preocupación inicial, la cual era, en palabras de un estudiante:

| | | |
|---|---|---|
| 27 | Andrés: | Yo podría decir que si hago un movimiento positivo de $\overrightarrow{BK}$, el rayo de la bisectriz va a seguir ese movimiento, pero éste *[señalando la otra bisectriz]* también lo va a seguir [...] Lo que no me queda claro es que podamos mantener esa proporción... |

Por su parte, GD, en primera instancia, hizo bocetos de la situación para validar la anticipación. Luego, a diferencia de los demás grupos, la visualización se convirtió en recurso para sugerir, y luego refutar, la condición adicional que uno de los integrantes del grupo quería añadir a la anticipación, como se muestra en el protocolo.

| | | |
|---|---|---|
| 11 | Juana: | Pero, pues sí son par lineal y además de la misma medida, ¿no?, de 90°. |
| 12 | James: | Pues no necesariamente. |
| 13 | Reinaldo: | No, con que sean par lineal. |
| 14 | James: | Si tienes... Mira este ejemplo. [Hace un boceto de dos ángulos que forman par lineal, pero no son rectos.] |

En GE se aprecia una mayor amplitud en las representaciones visuales debido a la variedad de anticipaciones que formularon, al tener en cuenta ángulos suplementarios que no son un par lineal (condición que también surgió en el trabajo de GD, pero que fue desechada muy rápidamente) y hacer consideraciones relacionadas con las bisectrices de ángulos en diferentes tipos de triángulos. Tal como estaba previsto, la tarea 4 diferenció las acciones asociadas a la visualización de estos dos grupos de las del resto, ya que ambos buscaron relaciones entre bisectrices de ángulos suplementarios que no forman par lineal.

[8] Los programas de geometría dinámica se constituyen en herramientas poderosas de indagación que favorecen el estudio de elementos genéricos, al permitir captar las invariantes en un fenómeno de variación. Por desgracia, en el curso de esta situación problema, los estudiantes aún no contaban con suficientes conocimientos del programa de geometría dinámica que se les proporcionó y no lo aprovecharon en todo su potencial.

### *Exploración*

Con respecto a la exploración, la diferencia más notoria en la actividad de los grupos se dio entre GA y los demás grupos. Al sugerir que se denominen x y *y* las medidas de dos de los ángulos, la tarea 1 indujo a abordar el problema con un enfoque algebraico. Entonces, es natural que los estudiantes no hubieran realizado acciones propias de la exploración geométrica, como medir y construir, sino acciones de índole algebraica, como establecer ecuaciones y buscar métodos de resolución de éstas que, pese a no ajustarse a la definición dada de exploración en este artículo, sí constituyen una exploración, porque llevaron al establecimiento de una conjetura.

Las exploraciones hechas por los demás grupos sí son de tipo geométrico. GB se encaminó a determinar la posición del $\overrightarrow{BK}$ para la cual la medida del ángulo fuera máxima, colocando el rayo en distintas posiciones. El trabajo de exploración los llevó a invalidar la anticipación e incluso a descalificar el enunciado, como lo muestra el siguiente fragmento del protocolo:

| | | |
|---|---|---|
| 16 | Talía: | La medida del ángulo que forman los rayos $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BG}$, que son las bisectrices, es de 90 grados. |
| 17 | Berta: | Entonces, la pregunta ¿cuál debe ser la posición de $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle$GBD sea máxima?... con respecto a eso, existe una sola. Como este ángulo no va a cambiar, no podemos hablar de máximo y mínimo, porque la medida va a ser la misma. |

Las acciones de GC se enfocaron, inmediatamente después de terminar la lectura del enunciado de la tarea 3, en determinar el efecto que tiene variar la posición de $\overrightarrow{BK}$ sobre la posición de las bisectrices. Para ello, recurrieron a hacer una representación gráfica de un caso particular: $\overrightarrow{BK}$ muy cercano al rayo perpendicular a $\overrightarrow{AE}$ por B. Ante la sospecha de la invarianza de la medida del ángulo, usaron la calculadora para hacer un barrido de las posiciones de $\overrightarrow{BK}$.

En GD, el hecho de que la anticipación fuera inmediatamente aceptada por los miembros del grupo hizo que la exploración no tuviera como finalidad establecer una conjetura, sino determinar si ésta podía ampliarse. Para ello, analizaron dibujos de ángulos suplementarios no adyacentes, inicialmente con lados paralelos y luego sin esa condición, como se puede ver en el siguiente protocolo.

| | |
|---|---|
| 252 Carolina: | ¿Será que sí se pueden prolongar *[las bisectrices]* así? ¿Sí da un ángulo *[recto]* también? |
| 253 James: | Sí, recto. |
| 254 Carolina: | ¿En cualquier posición? |
| 255 Reinaldo: | Sí, al prolongarlos, sí. |
| 256 Carolina: | ¿Será? Si hago aquí el ángulo y por acá hago el otro todo torcido, ¿sí da? |

GE realizó exploraciones con base en las diferentes representaciones visuales logradas, producto de sus anticipaciones. La exploración se redujo a invalidar todas las anticipaciones excepto la que establecieron como conjetura.

### *Conjeturación*

Las conjeturas formuladas por los grupos se recogen en el cuadro 7. En ellas se usan los mismos términos del respectivo enunciado, pues responden de manera directa al problema propuesto. Este hecho tiene relevancia especial en el caso de las tareas 2 y 3, trabajadas por GB y GC, respectivamente, ya que se emplean términos que no son usuales en geometría. Así, por ejemplo, la formulación de la conjetura de GB hace referencia a la colocación de $\overrightarrow{BK}$, ya que se preguntaba por la posición de éste; la formulación correspondiente de GC menciona el movimiento de $\overrightarrow{BK}$, puesto que la tarea demandaba considerarlo en relación con la variación de la medida de un ángulo.

Al pedir en la tarea que se enunciara el teorema que se pretendía justificar, los estudiantes se vieron obligados a la reformulación de sus conjeturas. En el cuadro 8 se presentan los teoremas que escribieron.

GB y GC vivieron una experiencia especial porque tuvieron que transformar su conjetura, que establecía un teorema de la geometría dinámica, en un teorema expresado en términos propios de la geometría euclidiana. En el protocolo que se presenta a continuación, se puede entrever el proceso que siguió GC hasta llegar al teorema que escribieron.

**Cuadro 8** Teorema formulado por cada grupo*

| | |
|---|---|
| GA | No se les solicitó ni intentaron hacerlo. |
| GB | "Las bisectrices de dos ángulos suplementarios forman un par de ángulos congruentes y los ángulos formados por el $\overrightarrow{BK}$ y las bisectrices de los dos ángulos forman un ángulo recto." |
| GC | "Dados dos ángulos que forman un par lineal, si variamos el lado común a ellos, la medida del ángulo formado con las bisectrices de dichos ángulos es recto." |
| GD[a] | Coincide con la conjetura. |
| GE | Coincide con la conjetura. |

* GD y GE no tuvieron necesidad de reformular la conjetura, puesto que con la tarea 4 quedaba establecido el teorema cuando completaran la proposición.

| | | |
|---|---|---|
| 94 | Observadora: | Traten de enunciar el teorema. |
| 95-96 | | ... |
| 97 | Andrés: | La medida del ángulo es constante. |
| 98 | Observadora: | Ésa es la solución. Traten de enunciar eso como un teorema. |
| 99-100 | | ... |
| 101 | Andrés: | Dados dos ángulos que forman un par lineal, si variamos el lado común a ellos, la medida del ángulo formado con las bisectrices de dichos ángulos no varía. |
| 102-117 | | *[Los estudiantes intentan desarrollar la justificación para la afirmación enunciada por Andrés, pero tienen mucha dificultad.]* |
| 118 | Observadora: | Si quieren, dejen el espacio para las justificaciones y traten de generar el enunciado del teorema. |
| 119-121 | | ... |
| 122 | Andrés: | Dados dos ángulos, par lineal, y construimos las respectivas bisectrices... |
| 123-124 | | ... |
| 125 | Observadora: | Sí, porque en el enunciado de un teorema se dice: si tal cosa... entonces tal otra. |
| 126 | Andrés: | Entonces, coloquemos: si rotamos el lado común... |
| 127 | | ... |
| 128 | Observadora: | Sí, sin introducir lo de rotar. ¿Qué fue lo que ustedes encontraron? |

129 Andrés: Que sin importar el movimiento, la medida del ángulo es la misma. Entonces decimos: la medida del ángulo es de 90°. A ver si les gusta: dados dos ángulos que forman par lineal, *DBK* y *KBA*, y construimos las respectivas bisectrices, *BD* y *BG*, la medida del ángulo *DBG* es de 90°.

### *Verificación*

GD y GE no hicieron verificaciones de la conjetura, pues ninguno de los integrantes del grupo la puso en duda. En los otros grupos, ante inquietudes suscitadas por alguno de sus integrantes, se realizaron verificaciones de diversa naturaleza, mencionadas en el cuadro 7.

## Aspectos asociados al producto de la actividad demostrativa

La vía de construcción de la justificación seguida por cada grupo se concreta, al menos parcialmente, a través del proceso de la demostración. Por tanto, su relación con la tarea existe, ya que, como hemos visto, ésta afecta la actividad de los estudiantes en las distintas acciones que realizaron antes de centrarse en la elaboración de una justificación. Sin embargo, la vía depende principalmente de los sujetos que la están buscando y consolidando, es decir, depende de las herramientas[9] conceptuales y procedimentales de que disponen los estudiantes, relativas, por un lado, al contenido matemático implicado y, por el otro, al trabajo dentro de un sistema axiomático. Por esta razón, la misma tarea con grupos diferentes puede seguir vías distintas. En el cuadro 9 se presentan los elementos utilizados o los caminos seguidos por los grupos para producir una justificación del teorema.

Clasificamos las justificaciones elaboradas por los grupos de acuerdo con la caracterización presentada en el cuadro 1. En el cuadro 10 exponemos una descripción global de ellas.

La producción de una justificación por parte de los grupos de trabajo y, en

[9] Herramientas que, a su vez, están determinadas por las experiencias escolares de los estudiantes, derivadas de los condicionantes del contrato didáctico establecido con ellos. Particularmente, el asignar al docente la responsabilidad absoluta de la validación, es una de las fuertes restricciones asociadas con las posibilidades de que los estudiantes se involucren con la práctica de la justificación.

**Cuadro 9** Vías de construcción hacia la justificación

| | |
|---|---|
| GA | • No se les solicitó pero intentaron hacerla, aun sin haber explicitado el teorema.<br>• Hacen una justificación algebraica de la medida del ángulo.<br>• Tratan de encontrar teoremas alusivos en el texto.<br>• Usan las ideas encontradas en la exploración sobre las relaciones entre los ángulos presentes en la representación. |
| GB | • Buscan relaciones entre los ángulos tratando de ubicarlos en triángulos específicos.<br>• Intentan ubicar los ángulos en un triángulo inscrito en una circunferencia.<br>• Encuentran relaciones entre pares de ángulos en la representación gráfica y relacionan la medida de cada par de ellos con la suma de las medidas de todos. |
| GC | • Hacen consideraciones en casos específicos.<br>• Tratan de encontrar teoremas alusivos en el texto.<br>• Buscan relaciones entre las sumas de pares de ángulos en la representación gráfica. |
| GD | • Desarrollan un ejemplo numérico, asignando medidas a los ángulos en la representación.<br>• Relacionan propiedades geométricas con los pasos de la verificación numérica.<br>• Hacen afirmaciones generales asociando a cada afirmación una propiedad geométrica. |
| GE | • No es posible evidenciar en la transcripción una vía clara de justificación. |

**Cuadro 10** Aspecto producto de la demostración

| | Explicación | Prueba | Demostración formal |
|---|---|---|---|
| GA | | Secuencia de afirmaciones y razones asociadas con las relaciones numéricas en juego. | |
| GB | | Secuencia de afirmaciones con razones que no hacen referencia a definiciones ni postulados. | |
| GC | | Secuencia de afirmaciones y razones que aluden a definiciones y postulados pero de una manera poco sistemática. Hay muchos pasos sin justificación. | |
| GD | | Presentación de un caso particular en el que encadenan el proceso algebraico con razones de carácter geométrico. | Presentación de afirmaciones y razones atendiendo a detalles rigurosos del encadenamiento de proposiciones. |
| GE | No hay suficiente información para describir el producto obtenido. | | |

particular, que ésta sea una prueba o una demostración formal, son hechos que están mucho más en relación con el entorno de aprendizaje que se estaba configurando en el curso que con la tarea propuesta. Esto puede corroborarse, por ejemplo, si se advierte que la tarea 1 no pedía explícitamente justificar la respuesta y, sin embargo, GA, *motu proprio*, adelantó acciones para producir una justificación. Cuando en la clase no hay normas de trabajo que exijan de manera sistemática justificar lo que se afirma y requieran cierta rigurosidad en la producción de las justificaciones dadas, los estudiantes pueden quedar conformes con llegar a la solución del problema y, en el mejor de los casos, producir una explicación; muy probablemente no se ven impelidos a dar una prueba.

## CONSIDERACIONES FINALES

Es bien sabido que las tareas con instrucciones que el profesor propone a los estudiantes constituyen uno de los componentes fundamentales del aprendizaje, pues ellas definen de manera general el rango de las acciones que han de realizar los estudiantes y, además, transmiten mensajes de lo que son las matemáticas y lo que significa hacer matemáticas (NCTM, 1991). La actividad en la que terminan involucrándose los estudiantes para desarrollar una tarea se puede diferenciar cualitativamente según las acciones que ésta requiera. Así, las tareas que demandan acciones relacionadas con los aspectos proceso y producto de la demostración abarcan dos caras inseparables de la actividad matemática: la heurística, basada en el razonamiento plausible, por un lado, y por el otro, la basada en la práctica de la justificación que, articuladas, recubren gran parte de lo que se considera como actividad matemática escolar.

Aun cuando la experiencia relatada se llevó a cabo en un curso de geometría con estudiantes que se preparan para ser futuros profesores de matemáticas, consideramos que los resultados de esta experiencia son alentadores para la educación básica y media, en la medida en que se constituyen en pruebas que apoyan la hipótesis de que es posible lograr que la actividad demostrativa desempeñe un papel protagónico en la clase de geometría y, por tanto, en la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel. Obviamente, no estamos insinuando que la demostración formal tenga que ser la meta de la actividad matemática en la escuela, pero sí queremos hacer énfasis en la necesidad de hacer esfuerzos para diseñar tareas que propicien la actividad demostrativa que culmine en algún tipo de justificación, según el nivel y las posibilidades de los alumnos.

La descripción y el análisis sobre las producciones de los cinco grupos de estudiantes nos permiten afirmar que, efectivamente, hubo diferencias ocasionadas por las distintas tareas. La influencia de la descripción del enunciado de la situación que delimita el objeto de la tarea y la formulación de la pregunta o la demanda solicitada influyeron en la posibilidad de que los estudiantes se involucraran o no en una actividad matemática genuina. Así, aun cuando el hecho geométrico que se puso en juego fue el mismo para todas las tareas, cada una de ellas requirió acciones diferentes de parte de los estudiantes en su proceso por comprender, resolver el problema y validar su solución, las cuales favorecieron en mayor o menor grado las distintas acciones de la actividad demostrativa. Se puso de manifiesto hasta qué punto la inclusión de instrucciones, como anticipar, formular una conjetura en forma de enunciado de teorema e intentar producir una justificación, constituyen un poderoso motor para articular los diferentes aspectos de la actividad matemática asociada a la resolución de un problema y, por tanto, se convierten en una estrategia apropiada para superar la trivialización de la actividad matemática escolar actual, que suele separar las diferentes dimensiones de la actividad matemática en acciones independientes.

El papel protagónico de la actividad demostrativa en la experiencia relatada se concretó, naturalmente, en ser el medio utilizado para obtener y validar, o por lo menos para intentar validar, un resultado. Frente a esto, somos conscientes de que, además del valor intrínseco de la tarea propuesta, fue la norma establecida en el curso –de justificar cuanta afirmación se haga– la que los movió a embarcarse en la producción de una justificación, aun si no sentían la necesidad de hacerlo. Realmente no basta con descubrir un resultado que sorprenda para que los estudiantes sientan la necesidad lógica de producir una demostración; lograr que los estudiantes actúen matemáticamente requiere también construir un entorno de aprendizaje en el cual el alumno se responsabilice por la verdad.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Villiers, M. (1993), "El papel de la demostración en matemáticas", *Epsilon*, vol. 26, pp. 15-30.

Gascón, J. (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, núm. 52, pp. 7-33.

Hanna, G. (2001), "Proof, Explanation and Exploration: An Overview", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, pp. 5-23.
Mariotti, M.A. (2001), "Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, pp. 25-53.
National Council of Teachers of Mathematics (1991), *Professional Standards for Teaching Mathematics*, Reston, VA, NCTM.

## DATOS DE LAS AUTORAS

**Leonor Camargo**
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
lcamargo@uni.pedagogica.edu.co

**Patricia Perry**
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
pperryc@yahoo.com.mx

**Carmen Samper**
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
csamper@uni.pedagogica.edu.co

# Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria

**Víctor Larios Osorio**

**Resumen:** Este trabajo tiene un doble propósito: por un lado, presenta un micromundo pensado para estudiar, en el nivel secundaria, propiedades de paralelismo y el desarrollo de justificaciones deductivas en el contexto de la geometría del triángulo y del cuadrilátero; por otro lado, presenta algunas observaciones realizadas durante su implementación en un grupo, así como algunas reflexiones al respecto y sobre el uso de la tecnología computacional en la educación matemática.

*Palabras clave*: enseñanza de la geometría, micromundos, educación matemática y nuevas tecnologías, geometría ginámica, geometría en la escuela secundaria.

**Abstract:** This work has two purposes: it shows a microworld designed to study parallelism properties and the development of deductive justifications on triangle and quadrilateral geometry at secondary school. On the other hand, it shows some observations carried out during microworld implementation in a class, as well as some reflections about it and about the use of computational technology in mathematics education.

*Keywords*: geometry teaching, microworlds, mathematics education and new technologies, dynamic geometry, secondary school geometry.

## INTRODUCCIÓN

El uso de software para geometría dinámica en el ambiente escolar es cada vez más amplio y ha ayudado a abordar algunos problemas de aprendizaje, pero también ha generado otros, como son los relacionados con la dinamicidad del software. El estudio de sus implicaciones y la propuesta de formas para su uso en la

Fecha de recepción: 8 de enero de 2005.

educación matemática es un tema necesario para que la integración de esta tecnología en el aula sea lo más eficiente posible.

Con esta intención, se planteó un proyecto de investigación para observar el desempeño de estudiantes de secundaria que utilizan software para geometría dinámica dentro de un micromundo con actividades pensadas para el estudio del paralelismo y el desarrollo de justificaciones deductivas. El software considerado fue Cabri-Géomètre y las actividades quedaron enmarcadas en construcciones relacionadas con triángulos y cuadriláteros.

De esta manera, en este trabajo se presentan algunas reflexiones sobre las implicaciones del uso de la tecnología computacional en el aprendizaje de la geometría, pero también se muestra una propuesta de cómo un profesor, considerando las observaciones que se registran sobre una implementación realizada, puede llevar a cabo actividades que ayuden a estudiantes del nivel medio a estudiar el paralelismo, los triángulos y los cuadriláteros, así como a desarrollar habilidades de observación de propiedades, argumentación, justificación y razonamiento (en particular, deductivo).

## CONSIDERACIONES PARA EL MICROMUNDO PROPUESTO

### MICROMUNDOS

La idea de micromundo se generó en el ambiente de la inteligencia artificial (IA) y Seymourt Papert fue uno de los primeros que lo planteó como "un ambiente de aprendizaje interactivo sobre la base de computadoras, donde los prerrequisitos están incorporados al sistema y donde los estudiantes pueden convertirse en arquitectos activos, constructores de su propio aprendizaje" (Papert, 1982, p. 144). La concepción de micromundo ha ido evolucionando[1] conforme ha pasado el tiempo. Originalmente, esta noción estuvo ligada a la programación, principalmente con Logo, pero con la aparición de otros programas, que cubren una amplia gama de posibilidades tanto en la capacidad de interacción con el usuario como con respecto a su intencionalidad (si están concebidos para usarse en la matemática o en la educación matemática, como los menciona Dreyfus, 1994, pp. 206-207), los ambientes posibles se han ido modificando y enriqueciendo.

En general, los micromundos son "dominios en los cuales los niños (y los

[1] Se pueden consultar, por ejemplo, Noss y Hoyles (1996) y Edwards (1998), donde se hacen relatorías al respecto.

adultos) pueden explorar y aprender simultáneamente [...] Ambientes donde la gente puede explorar y aprender de lo que recibe de la computadora como respuesta de su exploración" (Hoyles y Noss, 2003, pp. 112-113). Así pues, las computadoras se convierten en herramientas útiles al aprovecharse sus potencialidades de retroalimentación casi inmediata, de sus representaciones gráficas y de manipulación directa que tiene el software para geometría dinámica.

Un micromundo tiene objetos y herramientas internas que permiten al usuario realizar operaciones sobre los objetos en su interior, restringidas también por reglas internas. Además, estos ambientes, hay que decirlo, no están compuestos por un aparato, unas actividades, el ambiente, el alumno o el profesor, cada uno de éstos por separado, sino que se forma de la interacción de estos elementos dentro de un campo de conocimiento. Se considera que un micromundo tiene cuatro componentes (Hoyles y Noss, 1987) que interactúan entre sí:

- *El componente técnico* corresponde al soporte utilizado, es decir, y para el caso de los ambientes computacionales, el software que se considera en los ambientes.
- *El componente pedagógico* incluye la planeación y las actividades que realiza el profesor y tiene como función "estructurar la investigación y la exploración de conceptos encarnados en el componente técnico [...] enfocar la reflexión sobre aspectos particulares, sugerir métodos productivos de operaciones, indicar puntos de inicio útiles y generar vínculos con otras actividades" (p. 588).
- *El componente contextual* se refiere al ambiente social donde se lleva a cabo el micromundo.
- *El componente del alumno* corresponde, básicamente, al sujeto que aprende, tanto desde el punto de vista cognitivo como desde el afectivo.

Es importante considerar cada uno de estos componentes y las interacciones entre sí, pues cada uno influye en la manera como el individuo se apropia del conocimiento y le otorga significados.[2]

Así pues, con esto en mente, se presentan a continuación algunas consideraciones sobre el micromundo que se propuso. Se ha hecho énfasis en los dos primeros componentes, ya que los últimos dos siempre quedan supeditados a las condiciones existentes en el momento de la implementación.

[2] Sutherland y Balacheff (1999) ponen como ejemplo las diferencias entre los significados que se pueden otorgar al aprender geometría utilizando Logo y Cabri-Géomètre.

## El Cabri-Géomètre como componente técnico

Cabri-Géomètre es uno de los programas disponibles para abordar la geometría dinámica y ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas bajo un "espíritu" euclidiano que tiene una correspondencia con la geometría euclidiana (Mariotti, 2000, p. 28). Las principales características que distinguen a una aproximación a la geometría utilizando este software, en comparación con la tecnología de papel y lápiz o incluso con software de programación como Logo, son, según Straesser (2001): la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros, la de construir lugares geométricos y, más que nada, "la transformación continua en tiempo real comúnmente llamada 'arrastre'" (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351).

Esta operación de arrastre tiene consecuencias importantes en la apreciación de la geometría, pues el software se constituye en un mediador entre el conocimiento geométrico y el usuario. Sin embargo, es importante recalcar que las funciones y el uso que se le dé al arrastre pueden ser diversos y no necesariamente coinciden en todos los individuos (profesor, por un lado, y alumno, por el otro) para una misma situación.

Por ejemplo, Olivero (2003b), tras una investigación realizada desde un punto de vista cognitivo, identifica las siguientes modalidades de arrastre en alumnos a los que se les pide que resuelvan un problema geométrico:

- *Arrastre errante*: el mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.
- *Arrastre de borde*: el mover un punto semiarrastrable[3] que ya está ligado a un objeto.
- *Arrastre guiado*: el arrastre de puntos básicos de una figura, a fin de darle una forma particular.
- *Arrastre de* lieu muet:[4] el mover un punto básico de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que está siguiente una trayectoria oculta (*lieu muet*), incluso sin ser consciente de esto.

[3] "Un punto semiarrastrable es un punto en un objeto que puede ser movido, pero sólo sobre el objeto al que pertenece."

[4] *Lieu muet* significa literalmente "lugar mudo", término que utiliza la autora (y otros autores), porque se refiere a una trayectoria que no "dice" explícitamente cuál es su forma, pues se desconoce.

- *Arrastre en línea*: el dibujar nuevos puntos en los que se mantiene la regularidad de la figura.
- *Arrastre ligado*: el ligar un punto a un objeto y moverlo en tal objeto.
- *Examen de arrastre*: el mover puntos arrastrables o semiarrastrables, a fin de ver si la figura mantiene las propiedades iniciales (p. 66).

Asimismo, Olivero considera que estas modalidades tienen cierta jerarquía que le permite al individuo ir obteniendo cada vez más control sobre la operación de arrastre y los resultados que se obtienen.

Precisamente, en cuanto a la posibilidad de validación se tiene la última modalidad, la de *examen de arrastre,* pues es en ésta donde el arrastre explota la capacidad del software para mantener las relaciones geométricas entre los elementos de una construcción y así es posible verificar si está construida correctamente (Mariotti, 2000).

Además, la capacidad de manipulación directa de las construcciones puede permitirle al alumno comenzar a diferenciar entre lo que se denomina *dibujo,* que corresponde a las representaciones gráficas que se tienen de un objeto geométrico, y *figura,* que se refiere al significado que se le asigna a un objeto geométrico a través de sus dibujos o representaciones gráficas (Laborde y Capponi, 1994;[5] Hölzl, 1995; Goldenberg y Cuoco, 1998), lo cual está relacionado con la capacidad del individuo de "ver" más allá de la representación gráfica que tiene enfrente y llegar a un grado de abstracción mayor (Hoyles y Jones, 1998, p. 124). Sin embargo, no sólo es necesario que el usuario se percate de esa diferencia para poder explotar efectivamente el carácter dinámico del software, sino que también debe considerar las dependencias que se establecen entre los diversos objetos geométricos que intervienen en una cierta construcción (Hölzl, 1995). Por desgracia, tal aprehensión del carácter dinámico de las construcciones en un ambiente Cabri parece no ser automática, sino que requiere un esfuerzo y un desarrollo cognitivo (Larios, 2003; Olivero, 2003a). Por esta razón, una posible consideración es hacer que los alumnos trabajen en parejas, a fin de que la interacción entre dos pueda ser un medio para superar obstáculos, provocar reflexión y articular pensamientos (Ursini, 1993, p. 68).

Así que, como ya se ha visto en los párrafos precedentes, Cabri-Géomètre se puede convertir en un ambiente que propicia la exploración de la geometría por

[5] Laborde y Capponi introducen un tercer nivel: el de objeto geométrico, que es el referente teórico de todos los dibujos, el cual está restringido o "controlado" por las definiciones y las limitantes lógicas.

parte del usuario, pero también puede provocar situaciones que modifican la percepción clásica (la de dibujos estáticos) de la geometría escolar e introducir nuevas cuestiones que, a su vez, generan nuevos problemas para ser considerados en la labor docente y en la investigación de didáctica de las matemáticas.

Cabri-Géomètre, además, tiene la capacidad técnica de modificar sus menús, a fin de cumplir con los objetivos de las actividades que se puedan plantear. En el caso del micromundo propuesto, es importante considerar esta característica, pues resulta conveniente eliminar las opciones del menú "Verificar".[6] Esto es con el propósito de que los alumnos sean capaces de verificar propiedades por otros medios que no sean estas opciones y proporcionen justificaciones que se basen en propiedades geométricas. También conviene eliminar las opciones del menú "Transformaciones",[7] a fin de que los alumnos no utilicen estas operaciones que no tienen relación directa con las actividades propuestas. Esta capacidad del software puede aprovecharse también para incluir una opción en el menú "Construcciones de objetos lineales", a fin de poder construir directamente cuadriláteros, aunque no es absolutamente necesario, pues sólo simplificaría la opción para construir polígonos irregulares.

## Consideraciones teóricas para el componente pedagógico

Otras de las partes importantes por considerar es el respaldo teórico que se tuvo en cuenta para el diseño de las actividades del micromundo. En otras palabras, son consideraciones que sirven para darle un sentido al uso de la tecnología computacional.

Tres aspectos se han considerado: en primer lugar, el significado de la demostración matemática, ya que este micromundo busca que los alumnos propongan justificaciones para sus construcciones y sus observaciones que se basen en argumentos tendientes a la deducción; en segundo, la denominada *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero *et al.*, 1996), y, en tercero, la existencia de aspectos figurales y conceptuales en el caso de los objetos geométricos (Fischbein, 1993).

La demostración matemática es un constructo cuyo uso y significado cambia

[6] Las opciones de este menú corresponden a la verificación, por parte del programa, de si varios puntos son colineales, si objetos lineales son paralelos o perpendiculares, o si algunos objetos son equidistantes.

[7] Las opciones de este menú incluyen las simetrías, las rotaciones y las traslaciones.

según la comunidad o la institución[8] que la esté considerando. En este trabajo, el interés se centra básicamente en dos instituciones: la de los *matemáticos* y la de los *enseñantes de la matemática*. Es obvio que nos interese el significado de la demostración en la institución de los enseñantes de la matemática, ya que este trabajo pertenece al campo de la educación matemática, pero el que se le otorga en la institución de los matemáticos es importante, puesto que determina parcialmente el significado otorgado en la educación como consecuencia del proceso denominado *transposición didáctica* (Chevallard, 2000).

Considerando esto, sabemos que la demostración en la matemática es una parte epistemológicamente central de esta ciencia, pues es el medio que proporciona la certeza al conocimiento que desarrolla. No es en sí el método de investigación, sino el de validación y, puesto que los objetos en la matemática tienen la característica de ser abstractos, entonces este método para validar tiene que considerar tal naturaleza ajena a juicios empíricos (Hanna, 1996). Básicamente, también por esta razón la demostración es de carácter deductivo y, desde un punto de vista lógico, se puede definir como "...una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede derivarse de otras fórmulas anteriores de la serie mediante las reglas de transformación"[9] (Nagel y Newmann, 1979, p. 64).

Sin embargo, aunque se pudiera pensar que la única función de la demostración en la matemática es la de validar, ocurre que no siempre es así, pues como Thurston (1994, p. 162) comenta, también busca ayudar a la comprensión de la matemática. Así pues, la demostración para un matemático profesional es deductiva y puede ser formal, pero como producto social generado en el seno de una comunidad es "un argumento que convence a jueces calificados" (Hersh, 1993, p. 391), pudiendo también adoptar un carácter social, convencional e, incluso, temporal (Godino y Recio, 1997).[10]

[8] Aquí el término *institución* es en el sentido de Godino y Batanero (1994), entendiéndola como una comunidad dedicada a resolver problemas en común.

[9] Con los términos *fórmulas* y *reglas de transformación* los autores se refieren, respectivamente, a las expresiones formuladas correctamente y a las reglas de transformación que convierten una fórmula en otra de manera válida, todo dentro del sistema axiomático considerado.

[10] Al respecto, se pueden recordar, por ejemplo, las diversas crisis de fundamentos por las que ha pasado la matemática a lo largo de su historia, las cuales han obligado a los miembros de la comunidad matemática a considerar el replanteamiento de algunas concepciones y teorías matemáticas, como fue el caso de la geometría a inicios del siglo XX. Como otro ejemplo, también existe el tema de la aceptación de las demostraciones que utilizan computadoras, tal como ya ocurrió en la década de 1970 con la "demostración" del *teorema de los cuatro colores,* de la cual algunos están recelosos, porque sus autores recurrieron a la verificación con computadoras en una parte del proceso.

Estas consideraciones se hacen importantes al transitar hacia la institución de los educadores matemáticos, pues se nota que la demostración es un producto de la comunidad y no cumple una y sólo una función. Además, y teniendo en cuenta ya únicamente el ámbito escolar, la demostración no sólo se puede concebir como un objeto de estudio (un contenido por aprenderse), sino también como un medio y una herramienta para aprender. Esto quiere decir que, en este ámbito, la demostración puede tener una variedad de funciones (De Villiers, 1993; Olivero, 2003b): como *verificación* de la verdad de una afirmación, como *convicción* de un hecho, como *explicación* de un enunciado matemático, como *medio de comunicación* entre los individuos (sean alumnos, profesores o matemáticos), como *sistematización* de varios resultados o conocimientos, como *descubrimiento* y como *reto intelectual*.

De esta manera, una demostración no cumple una y sólo una función, sino que, dependiendo del contexto, del momento, del uso que se le dé e incluso de la persona que la esté utilizando (construyendo o leyendo), una demostración específica podrá tener una u otra función.

Ahora bien, ante estas funciones diversas en la matemática escolar, la definición de demostración que proporcionan Nagel y Newmann (1979) no puede ser considerada tal cual (si fuese así, simple y sencillamente no se podría hablar de demostración en la escuela), así que es necesario considerar algún punto de partida acorde con este cambio en la comunidad de referencia y que incluso refleje el fenómeno de la transposición didáctica.

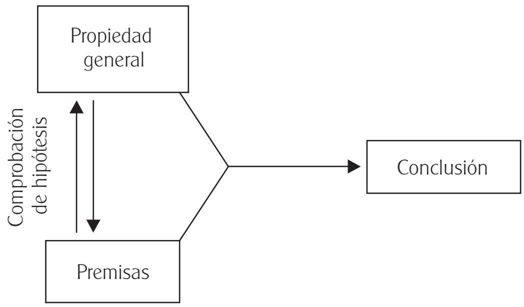
Balacheff (1987) ha abordado este asunto haciendo una diferencia entre los términos "prueba" y "demostración". Con el primero se refiere "a una explicación[11] aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores" (p. 148). Con el segundo término se refiere a las pruebas que se realizan en el seno de la comunidad matemática. Sin embargo, al parecer es más importante establecer la diferencia entre ambas instituciones (en el sentido de Godino), que entre las dos palabras. Lo importante es, entonces, que la demostración se sitúa como una *explicación* con un cierto carácter social y con ciertas funciones (dependiendo de la institución). Así que, en la institución escolar, proponemos que el significado de la demostración está ligado a las prácticas argumentativas en las cuales se busca explicar un hecho matemático y convencer a uno mismo y a otros individuos de que tal hecho

[11] Para Balacheff una *explicación* es "un discurso dirigido a volver inteligible el carácter de verdad, adquirido por el que habla, de una proposición o de un resultado" (p. 147).

es cierto, con la característica de que estas prácticas argumentativas estén estructuradas con base en el razonamiento deductivo.

Para precisar, al razonamiento lo concebiremos tal como lo propone Balacheff (2000, p. 13): "... la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información". En particular, el razonamiento deductivo o inferencial tiene una estructura ternaria en el que intervienen las premisas (que contienen las hipótesis), una propiedad general (que incluye al menos una implicación) y la conclusión (que incluye una nueva proposición):

**Figura 1**




Las hipótesis de las premisas son comprobadas en la propiedad general, entonces se lleva a cabo una "sustitución" en esta última del caso particular y se realiza la deducción, considerando la implicación que existe en la propiedad general.

Ahora bien, por otro lado, el enfrentar a los alumnos a un teorema ya planteado y pedirles una demostración los lleva a tener que reconstruir la complejidad cognitiva de un proceso en el cual se enlazan funcionalmente actos de pensamiento de diversas naturalezas que los llevan a actividades parciales que son difíciles de reunir en una sola (Boero *et al.*, 1996). De hecho, este proceso se puede apreciar al leer los comentarios de los propios matemáticos cuando realizan investigaciones matemáticas, descubrimientos y, después, demostraciones.[12]

Ante esta situación, y como producto de algunas investigaciones, se ha planteado la existencia de una unidad cognitiva denominada *unidad cognitiva de*

[12] Al respecto, se pueden consultar varias obras, como por ejemplo *El enigma de Fermat* de Simon Singh (1998, México, Planeta) donde se describe la experiencia de Andrew Wiles durante la construcción de la demostración del llamado "último teorema de Fermat".

*teoremas* (Boero *et al.*, 1996), que se basa en la continuidad que existe entre el proceso de producción de una conjetura y la construcción posible de su prueba. Si, por ejemplo, esta unidad se rompe, como cuando se pide una tarea a los alumnos utilizando una frase que inicie con "demuestre que...", se pierde la continuidad y sólo se recupera cuando existe una reapropiación del enunciado a través de un ciclo completo: *explorar, conjeturar, explorar, reorganizar una nueva demostración*. Estas etapas se pueden agrupar en dos fases: la primera, relativa a la producción de conjeturas y la segunda, a la construcción de la prueba.

En el ciclo, las partes de exploración son dinámicas. En la primera fase, la exploración es sobre la situación problemática, a fin de generar un espacio de posibles configuraciones y, así, trabajar después en la producción de la conjetura. Esta exploración dinámica tiene una relevancia fundamental, pues provee al individuo no sólo del enunciado que después validará (la conjetura), sino también de argumentos que pueden utilizarse posteriormente. Este razonamiento argumentativo permite a los alumnos la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de enunciados, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

En la fase de construcción de la prueba, se lleva a cabo otra exploración dinámica que permite la búsqueda de argumentos para la construcción de la demostración. Estos argumentos están relacionados con los argumentos que llevaron a la construcción de la conjetura, pues estos últimos se utilizan para apoyarse en la formulación de los de la segunda fase. Más aún, los argumentos hechos durante la producción de enunciados se usan en la justificación de la propia demostración, a menudo con expresiones lingüísticas similares. Sin embargo, tienen marcadas diferencias entre sí, principalmente en la función que asumen durante el proceso de pensamiento: inicialmente son un soporte para la selección y la especificación de la conjetura y después, pueden ser un soporte para la implementación de una conexión lógica.

La relación entre la argumentación y la construcción de la demostración es compleja, a pesar de la posibilidad de aprender a construir demostraciones a partir de exploraciones y conjeturas.

La última consideración importante para este componente pedagógico del micromundo es la *teoría de los conceptos figurales* de Fischbein (1993). Esta teoría se refiere a la posibilidad de considerar los objetos geométricos como *conceptos figurales* que poseen dos componentes: el *figural* (relativo a la información física y visual de las representaciones gráficas) y el *conceptual* (relativo a la información proporcionada por las propiedades y las definiciones). Ambos aspectos se hallan ligados entre sí e, idealmente, deberían fusionarse de manera equilibrada para poder manejarse de manera adecuada. Pero también lo anterior hace necesario distinguir entre *figuras* y *dibujos*, tal como se comentó en la sección anterior.

Esta distinción se hace, porque el *dibujo* es una representación gráfica que contiene información figural, la cual, en ocasiones, puede incluir datos innecesarios que van desde aspectos completamente sin relación con el objeto geométrico en sí, pero relacionados con el aspecto gráfico (como el color, el grosor, etcétera), hasta aspectos que pueden influir en la apreciación del dibujo, como lo es la orientación. Ahora bien, como no se puede tener acceso directamente a los *objetos geométricos* (ya que son referentes teóricos), se representan por medio de los *dibujos*, a los cuales se les asignan *significados*, que son las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación.

Estos significados corresponden precisamente a la noción de *concepto figural* propuesta por Fischbein (Laborde y Capponi, 1994, p. 169), ya que en ella se entrelazan los aspectos figurales que están relacionados con los dibujos atribuidos a una figura geométrica en particular, con las limitantes conceptuales que proporciona el objeto geométrico desde su naturaleza teórica.

Ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada, entre otras cosas, a su desarrollo cognitivo, por lo que no se hallan necesariamente equilibrados de una manera adecuada. Si bien es necesario que exista una fusión entre ellos para que el manejo de los objetos geométricos sea apropiado, tal parece que eso ocurre sólo en una situación ideal y extrema (Maracci, 2001), ya que, de hecho, Fischbein (1993, p. 150) afirma: "Lo que sucede es que las propiedades conceptuales y figurales permanecen bajo la influencia de los sistemas respectivos, el conceptual y el figural".

Sin embargo, según Maracci (2001), parece que los alumnos buscan dicha fusión de una u otra manera (incluso de una manera no consciente) al tratar de construir dibujos que les resulten *satisfactorios*, es decir, dibujos que cumplan con las siguientes condiciones:

- Un dibujo debería representar "correctamente" la situación geométrica descrita en el problema, esto significa que la comprensión del estudiante de una situación dada y su interpretación del dibujo producido debería ser consistente.
- Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico [...]
- Un dibujo debería poseer una buena *gestalt*,[13] debería satisfacer las leyes

[13] Con el término "buena *gestalt*" Maracci se refiere a que la configuración visual del di-

> fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción (Maracci, 2001, p. 481).

Sin embargo, como se puede observar, dicha satisfacción no necesariamente se relaciona con las limitantes lógicas o conceptuales de las figuras, pues hay muchas situaciones en las que se cumplen estas condiciones sin considerar este tipo de limitantes, como por ejemplo, al tener en cuenta la forma (negarse a usar triángulos rectángulos como ejemplos genéricos de los triángulos) o la orientación (utilizar diagramas con segmentos o lados de polígonos alineados obligatoriamente con los bordes de la hoja).

Las tensiones que se generan entre los aspectos figurales y conceptuales pueden transformarse en un obstáculo durante el aprendizaje de la geometría, sobre todo cuando hay un predominio de los aspectos figurales, tal como lo comentaremos en la sección "Algunas observaciones durante una implementación" de este escrito.

## UN MICROMUNDO PARA ESTUDIAR PARALELISMO

En general, las actividades que conforman el micromundo propuesto se dividen en dos, según los objetos utilizados: las de triángulos y las de cuadriláteros. En ambos casos, se plantearon actividades en las que, en términos generales, los alumnos tienen que realizar construcciones y observar propiedades de paralelismo que, al aplicarlas, les permitirán después "recuperar" la construcción original. Para ello, se recurrió a la noción de *unidad cognitiva de teoremas* (mencionada en la sección anterior) para el diseño y estructuración de las actividades, pues se buscó un ciclo de explorar, plantear propiedades observadas o procedimientos (en el nivel de conjetura), volver a explorar y justificar las propiedades observadas o los procedimientos propuestos.

Con ello los alumnos desarrollan sus capacidades de observación y de justificación matemática, específicamente de tipo deductivo, y se utilizan, a partir de triángulos y cuadriláteros, los llamados triángulos y cuadriláteros de los puntos medios.

A continuación, se presenta una guía de actividades que puede ser adaptada a las necesidades de los profesores del nivel medio. Es importante mencionar

bujo (incluidas su posición y orientación con respecto a un marco de referencia, como el constituido por los bordes del papel) sea adecuada para una buena aprehensión visual de los elementos de la construcción que le permitan al individuo identificarlos de manera correcta.

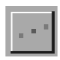
que se está suponiendo que los alumnos ya tienen un conocimiento básico del uso del programa, por lo que no se hará énfasis en ese aspecto.

## ACTIVIDADES CON TRIÁNGULOS

### *Primera actividad*

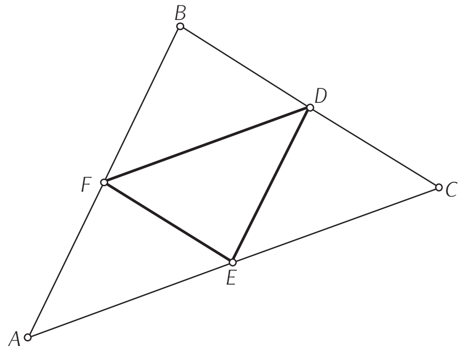
Como primer paso, se pide a los alumnos que construyan un triángulo cualquiera, cuyos vértices se llamarán (por comodidad) *A*, *B* y *C*. Recordemos que, para realizar esta acción, se utiliza la opción  para construir el triángulo y  para ponerles nombres a los vértices.

Resulta importante que los alumnos, desde este momento, se percaten de la capacidad distintiva del software: el arrastre. Activando la opción  deben darse cuenta de las posibilidades de modificar la forma, tamaño y posición del triángulo. Desde este momento, es necesario que el profesor esté al pendiente del significado que los alumnos atribuyan a esta operación, ya que pueden ir desde la percepción adecuada del arrastre, como productor de una gran diversidad de casos de la construcción, hasta el de una herramienta física útil sólo para "acomodar" el dibujo. Estos fenómenos se comentarán con mayor profundidad más adelante.

Lo siguiente es que los alumnos construyan el *triángulo de los puntos medios* a partir del que ya tienen. Para ello, tienen que construir los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo utilizando la opción  y luego construir el triángulo, utilizando tales puntos como vértices. Se puede tener orden en las construcciones de los alumnos pidiéndoles que llamen *D* al punto medio del lado *BC*, *E* al de *AC* y *F* al de *AB*. De esta manera, el triángulo *DEF* es el *triángulo de los puntos medios* del triángulo *ABC* (figura 2).

En este punto resulta importante, durante el proceso de aprehensión de la potencialidad dinámica del software, que los alumnos verifiquen si la construcción está bien hecha, es decir, que el dibujo refleje las relaciones geométricas de la figura. Lo ideal sería que los alumnos utilizaran en este momento el arrastre en su modalidad de *examen de arrastre,* al mover los vértices del triángulo *ABC* para observar si realmente el triángulo *DEF* que hicieron es el *triángulo de los puntos medios* del primero.

**Figura 2**




Ahora bien, utilizando la opción  se pueden medir los perímetros de los dos triángulos para establecer cuál es la razón entre ellos. Pero también, y más importante, se puede establecer el paralelismo entre los lados de los dos triángulos: *AB* es paralelo a *DE*, *BC* a *EF* y *AC* a *DF*. Esta propiedad es lo que une las diversas actividades, por lo que resulta necesaria su observación. Una posibilidad es pedir a los alumnos que determinen cuál es la posición entre sí de cada una de las parejas de lados mencionadas.

Es conveniente que los alumnos realicen la exploración y la investigación en parejas, ya que así pueden compartir observaciones y opiniones, y formularlas así verbalmente. Después, es adecuado realizar una discusión grupal, a fin de que compartan las observaciones, las posibles conjeturas y las justificaciones iniciales de las observaciones y las conjeturas. Puesto que el interés es el paralelismo, se puede conjeturar (atendiendo a la figura 1) que *los lados de un triángulo ABC y los de su triángulo de los puntos medios* (*DEF*) *son paralelos entre sí* (**conjetura 1**).

Dos observaciones importantes: primero, es muy posible que los alumnos del nivel medio no planteen una conjetura en los términos en los que se acaba de hacer, sino que podrán hacerlo sin atender algunos detalles o con imprecisiones; será parte de la labor del profesor ayudar a refinar la afirmación lo más posible, eliminando las imprecisiones, pero sin crear confusiones. Segundo, hay que hacer énfasis en que, para continuar con las actividades propuestas, se tiene que observar el paralelismo planteado, pues las justificaciones proporcionadas no necesariamente serán deductivas, ya que para ello los alumnos necesitarían tener en cuenta otros resultados que el profesor, después de que los alumnos expusieran sus justificaciones y las refinaran, puede proporcionar para ligarlo con la discusión. ¿Podría el lector seleccionar algún teorema que ayude al respecto? Sugerencia: una buena opción es recurrir a la semejanza entre triángulos, pero se le deja al lector determinar cómo usarlo.

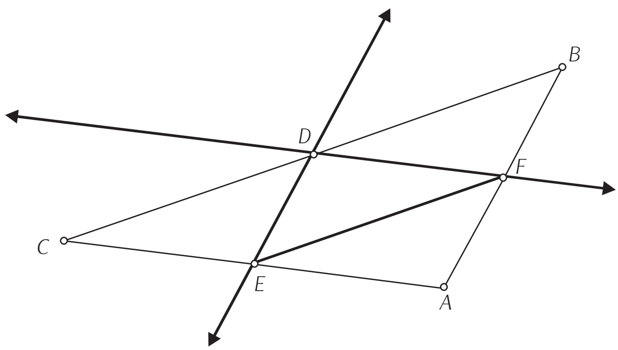
En este punto se observa la conveniencia de eliminar las opciones de verificación del programa, pues así se evita la posibilidad de que los alumnos le "pregunten" al programa (utilizando la opción ) si las parejas de lados son paralelos entre sí y, al obtener una respuesta, no necesiten más argumentos para convencerse (la computadora se convierte en árbitro o autoridad).

### *Segunda actividad*

En esta ocasión, se realiza una construcción recíproca a la primera: se utilizan rectas paralelas para construir los puntos medios de los lados del triángulo. Entonces, se inicia nuevamente construyendo un triángulo *ABC* y el punto medio de *sólo un lado*, que bien puede ser el lado *BC*, llamándolo *D*. Ahora bien, utilizando la opción  se construyen dos rectas paralelas que pasen por *D*: una paralela al lado *AB* y la otra a *AC*. Evidentemente, cada una de estas rectas corta el triángulo en dos puntos distintos, así que se puede llamar *F* al punto que se creó en la intersección con el lado *AB* y *E* al que se creó sobre el lado *AC* (figura 3).

Utilizando la opción  se pueden ocultar las rectas paralelas y construir así el triángulo *DEF* con la opción adecuada.

Figura 3



La intención, en este momento, es observar ambos triángulos y pedir a los alumnos que determinen dos cosas: si *BC* es paralelo a *EF* y si los puntos *D*, *E* y *F* son los puntos medios de los lados del triángulo *ABC*, porque si lo fuesen, entonces el triángulo chico sería el *triángulo de los puntos medios* del grande. Una vez más, una discusión grupal ayudará a que los alumnos compartan las observaciones y las conjeturas planteadas. Siguiendo la misma línea de este trabajo, se puede conjeturar (atendiendo a la nomenclatura de la figura 2) que, *si en un triángulo* ABC *se traza el punto medio de un lado* (BC) *y luego se trazan rectas paralelas hacia los otros dos lados que pasen por dicho punto medio, éstas determinan los puntos medios de los lados restantes del triángulo, y estos puntos medios, junto con el primero trazado sobre* BC, *son los vértices del triángulo de los puntos medios del original* (**conjetura 2**).

Esta afirmación es un resultado directo de la aplicación del Teorema de Tales, pero de nuevo, la intención no es que el profesor proporcione de manera inicial la justificación (la prueba), sino que los alumnos justifiquen, expliquen y se convenzan.

## *Tercera actividad*

En esta actividad se cambia el procedimiento: en lugar de observar propiedades a partir de construcciones, se hará la construcción a partir de las propiedades.

En un trabajo en equipo y sin usar la computadora, se plantea la situación inversa a los alumnos: supongan que tienen el *triángulo de los puntos medios* (que hemos estado llamando *DEF*) y tienen que construir el triángulo original (al que hemos llamado *ABC*), ¿cuáles condiciones necesita cumplir el triángulo *DEF*? y ¿cómo lo harían?

Para realizar esta construcción, es necesario que los alumnos recuperen las observaciones hechas sobre paralelismo, determinen las condiciones necesarias para el triángulo *DEF* y planteen un procedimiento de construcción. Después del trabajo en equipo, se puede realizar una discusión grupal inicial, a fin de que los alumnos se pongan de acuerdo en algunos puntos clave del proceso, los justifiquen y defiendan. Posteriormente, se realiza la construcción en la computadora por equipos.

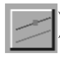
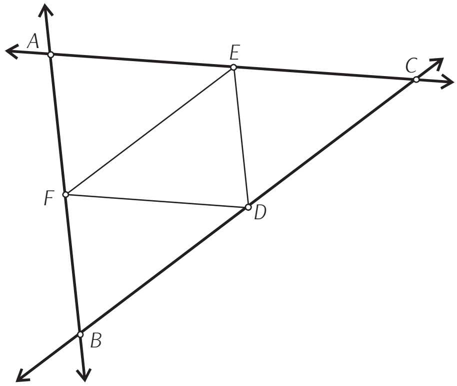
Un procedimiento para la construcción, que recupera las propiedades de paralelismo observadas, consiste en construir (con la opción ) las rectas paralelas

**Figura 4**



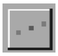

a cada uno de los lados que pasan por el respectivo vértice opuesto, las cuales se cortan entre sí en pares, para después construir el triángulo buscado, considerando los puntos de intersección de las rectas construidas, como los vértices *A*, *B* y *C* (figura 4). Utilizando la opción , se ocultan las rectas y queda el triángulo *ABC*.

Tras la construcción, cuatro cosas son relevantes: primero, lo ideal sería que los alumnos verificaran si su construcción es correcta, utilizando el arrastre como medio de examen para mover los puntos independientes, es decir *D*, *E* o *F*. Segundo, la respuesta a si el triángulo *DEF* necesita alguna propiedad especial para iniciar la construcción es negativa, así que, como profesor, habría que estar pendiente a ese respecto, pues los alumnos no siempre dan esta respuesta. Tercero, se debe verificar si realmente el procedimiento produce el triángulo *ABC* tal que el triángulo *DEF* sea el de sus puntos medios; para cuestiones de convicción, no es raro que algunos utilicen la opción  para medir los lados de ambos triángulos, pero en este punto, valdría la pena explorar el razonamiento deductivo y ayudar a los alumnos a que presenten justificaciones que se apoyen en las justificaciones y en los resultados proporcionados en las dos actividades anteriores. Cuarto, se podría hacer una pequeña exploración sobre la siguiente pregunta: ¿a partir de un triángulo *DEF* cualquiera, cuántos triángulos *ABC* se pueden construir de tal suerte que aquél sea el *triángulo de los puntos medios* de este último? La respuesta, que sería bueno que los alumnos buscaran, es: sólo uno.

## Actividades con cuadriláteros

A partir de las actividades realizadas con triángulos, se pueden sustentar las siguientes que involucran cuadriláteros.

### *Primera actividad*

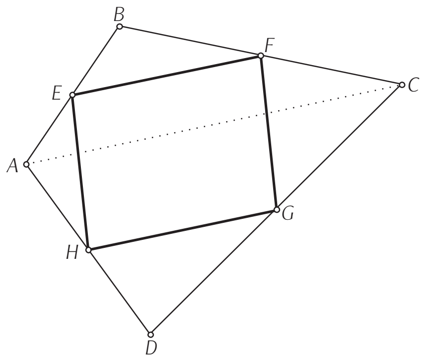
Hay que construir un cuadrilátero, lo cual se logra utilizando la opción .[14] Conviene llamar a los vértices *A, B, C* y *D* para seguir un orden. Enseguida, se realiza la construcción de su *cuadrilátero de los puntos medios* (utilizando las opciones  y ), llamando *E, F, G* y *H* a sus vértices (véase la figura 5 más adelante).

Mediante el arrastre, los alumnos pueden verificar si su construcción está bien hecha, pero también se les pide que identifiquen cuáles propiedades se mantienen invariantes al modificar el tamaño y forma del cuadrilátero original. Se puede utilizar la opción para medir longitudes para determinar que los lados opuestos del cuadrilátero *EFGH* miden lo mismo, a fin de que observen propiedades relacionadas que son invariantes y que llevan al paralelismo entre los lados opuestos de este cuadrilátero. Nuevamente, una discusión grupal dirigida por el profesor, donde los alumnos presenten sus observaciones y las defiendan, podría llevar a conjeturar que *el cuadrilátero de los puntos medios de otro cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos entre sí o que miden los mismo* (**conjetura 3**).

Esta afirmación puede refinarse durante la discusión grupal bajo la coordinación del profesor. Durante este proceso, y tras una revisión de los nombres de los cuadriláteros, se puede replantear la afirmación, buscando también un formato de proposición condicional: *si EFGH es el cuadrilátero de los puntos medios de otro, entonces EFGH es un paralelogramo* (**conjetura 3**). El siguiente paso es realizar la justificación.

[14] Es importante que se avise a los alumnos que, al crear o al considerar el último vértice (el cuarto), se haga un doble clic con el ratón para que el programa termine con la construcción del polígono.

Figura 5




### *Segunda actividad*

A fin de proporcionar más elementos para la construcción de la justificación, se pide a los alumnos que construyan las diagonales del cuadrilátero original, aunque para ser más claros, conviene comenzar con sólo una de ellas (la punteada en la figura 5).

Una acotación interesante. Al construir sólo una diagonal, se observan sólo dos triángulos dentro del cuadrilátero (sin considerar el paralelogramo de los puntos medios), lo cual puede ayudar a relacionarlo con las actividades anteriores de triángulos, pues si se construyen las dos diagonales, se crean cuatro triángulos y entonces el alumno debe realizar un proceso de reconfiguración (Sánchez, 2003) de la figura que bien puede no llevarse a cabo.

Así pues, echando mano de la diagonal trazada (supongamos que es *AC*) y los triángulos que se crean en el interior del cuadrilátero (consideremos el caso de *ABC*), se puede pedir a los alumnos que determinen qué relación existe entre las posiciones del lado *EF* del *cuadrilátero de los puntos medios* y la diagonal *AC* (que viene siendo uno de los lados del triángulo creado). Después de una exploración al respecto, la discusión grupal es una buena opción para que nuevamente los alumnos se pongan de acuerdo en sus observaciones y defiendan sus conclusiones.

La intención es que los alumnos puedan utilizar una parte de lo que llamamos antes **conjetura 1**, pues como *E* y *F* son puntos medios de los lados *AB* y *BC*, respectivamente, del triángulo *ABC*, entonces *EF* es un lado del *triángulo de los puntos medios* de aquél y, por tanto, es paralelo al lado *AC* del triángulo que, a la sazón, viene siendo una diagonal del cuadrilátero *ABCD*.

Pero además, el siguiente paso es que los alumnos investiguen qué pasa con el segmento *HG* con respecto a la misma diagonal *AC* (se utiliza otro triángulo). El procedimiento es similar al descrito en el párrafo anterior y, entonces, resulta que *HG* es paralelo a *AC*, por lo que *EF* es paralelo a *HG*. Utilizando la otra diagonal del cuadrilátero original (*BD*), se puede llegar al caso de que *EH* es paralelo a *FG*.

Otra exploración que puede ser útil si se quiere extender esta actividad y la siguiente es una que lleve a observar la longitud de los lados del paralelogramo *EFGH* con respecto a las diagonales del cuadrilátero *ABCD*. La propuesta es dejarla en manos de los alumnos, lo que, junto con los mismos resultados de las actividades de los triángulos, derivaría en que los lados *EF* y *HG* miden cada uno la mitad que la diagonal *AC*, mientras que *EH* y *FG* miden también la mitad que *BD*.

## *Tercera actividad*

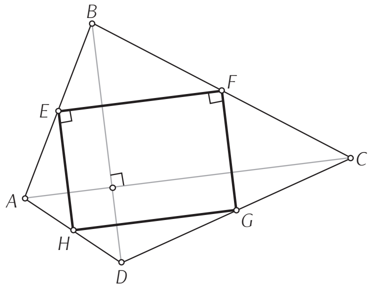
En esta actividad se va a considerar la definición de rectángulo como un paralelogramo cuyos ángulos internos son todos congruentes entre sí (miden 90°), pues, comenzando con un cuadrilátero *ABCD* y su *cuadrilátero de los puntos medios EFGH*, se pide a los alumnos que manipulen aquél para que este último sea rectángulo.

La intención es que, primero, los alumnos determinen si esto es posible, para luego, de ser así, determinar cuáles propiedades necesita tener el cuadrilátero *ABCD* para que esto ocurra. Al finalizar la exploración en equipos o parejas, es muy recomendable compartir y defender los puntos de vista mediante una discusión grupal coordinada por el profesor. Esta defensa de las observaciones y justificaciones propuestas por los alumnos puede ser encauzada hacia una estructura deductiva con la ayuda del profesor.

El caso es el siguiente (figura 6): como los lados adyacentes del paralelogramo *EFGH* son perpendiculares entre sí por la definición de rectángulo, y como también las parejas de lados opuestos son paralelas a cada una de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*, tal como se observó en la actividad anterior, entonces, las diagonales deben ser perpendiculares entre sí para que el cuadrilátero *EFGH* sea un rectángulo.

Un reto extra es plantear a los alumnos una nueva construcción del cuadrilátero *ABCD* y de su *cuadrilátero de los puntos medios* (*EFGH*), en la cual se utilice un procedimiento, ideado por los alumnos, de tal suerte que siempre *EFGH* sea un rectángulo. Una idea para el profesor es considerar que las propiedades recién observadas se centran en la perpendicularidad de las diagonales.

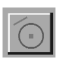
**Figura 6**




### *Otras actividades optativas*

Existen otros retos más complicados que el profesor puede o no considerar, aunque finalmente resultan interesantes.

Uno es utilizar la extensión que se planteó al final de la segunda actividad y repetir la tercera, pero buscando las propiedades que necesita tener el cuadrilátero *ABCD* para que su *cuadrilátero de los puntos medios* sea un cuadrado (considerándolo como un rectángulo que tiene todos sus lados de la misma longitud), por lo que esta exploración no sólo debe tener en cuenta el hecho de que los lados adyacente de *EFGH* (y por tanto las diagonales del cuadrilátero *ABCD*) son perpendiculares entre sí, como en el caso de la tercera actividad, sino también el hecho de que todos los lados miden lo mismo y, por tanto, las diagonales del cuadrilátero *ABCD* también miden los mismo, aunque el doble de los lados de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

Otro es realizar la construcción de un cuadrilátero y la de su *cuadrilátero de los puntos medios*, de tal manera que, al arrastrar con el ratón los vértices de aquél, este último sea siempre un cuadrado. ¿Podría el lector realizarla? (La opción  podría ser útil.)

Un último reto es considerar un paralelogramo *EFGH* y pensar en un procedimiento tal que permita recuperar el cuadrilátero *ABCD* tal que aquél sea el *cuadrilátero de los puntos medios* de este último. Habría que pensar en las condiciones que necesita *EFGH* y si son necesarias otras condiciones, para luego considerar las propiedades observadas durante las actividades realizadas y así idear el procedimiento necesario. Este reto, sin embargo, tiene la dificultad extra de que es necesario un requisito adicional: el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero *ABCD* (o de sus extensiones) tiene una posición arbitraria. Esto lleva al hecho de que un paralelogramo cualquiera es *cuadrilátero de los puntos medios* de una cantidad infinita de cuadriláteros, a diferencia del caso de los triángulos. El procedimiento para realizar tal construcción se le deja al lector.

## ALGUNAS OBSERVACIONES DURANTE UNA IMPLEMENTACIÓN

Durante el ciclo escolar 2003-2004 se aplicaron estas actividades en la escuela secundaria "Mariano Matamoros" en la localidad semiurbana de Santa Rosa Jáuregui, Querétaro (México). Participó un grupo de tercer grado que trabajó en parejas durante 10 sesiones de 50 minutos cada una.

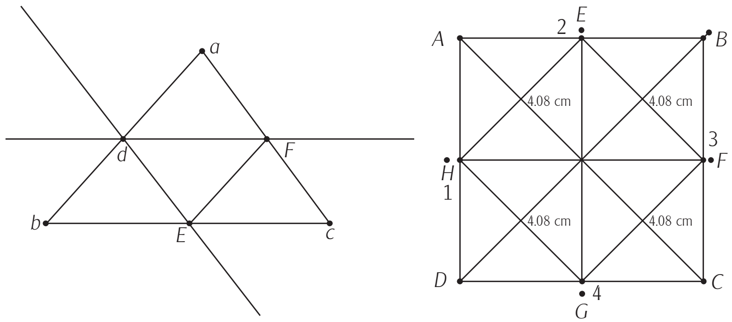
En esta implementación, que se realizó con el apoyo de la profesora del grupo, se hicieron preguntas a los alumnos con el propósito de observar algunos fenómenos cognitivos relacionados, más que nada, con una percepción de *rigidez geométrica* de las construcciones geométricas, el significado otorgado a la función de arrastre del software y el tipo de justificaciones que presentaron. A continuación, ampliaremos éstos para que el profesor que decida utilizar las actividades propuestas tenga en cuenta la posible presencia de estos fenómenos.

### SOBRE LA RIGIDEZ GEOMÉTRICA

El fenómeno de rigidez geométrica se refiere a la incapacidad de un individuo para manejar mentalmente una figura geométrica cuando ésta no se encuentra en ciertas posiciones "estándares" o cuando no pueden imaginar la figura si varía su posición o su forma (Larios, 2003). Este fenómeno puede ser relacionado con los conflictos que aparecen entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, así como la necesidad de una búsqueda de dibujos satisfactorios en el sentido de Maracci (2001).

Además, a pesar de que los textos de las definiciones escolares de los objetos matemáticos (como los triángulos y los cuadriláteros que se utilizan en estas actividades) no hacen énfasis en tales posiciones, existe una tendencia a utilizar diagramas, incluso en la pantalla de la computadora, donde se privilegia la orientación y la forma de las figuras (véase, por ejemplo, la figura 7). Esta tendencia, que por cierto es fomentada muchas veces desde el nivel preescolar, aparece como

**Figura 7** Ejemplos de construcciones de alumnos para la segunda actividad con triángulos (izquierda) y para la segunda con cuadriláteros (derecha)




un obstáculo, incluso para la aprehensión del rasgo que distingue al software de geometría dinámica: la dinamicidad proporcionada por el arrastre.

Es curioso ver incluso comportamientos que prevén la orientación, como es el caso de la tercera actividad con triángulos, en donde la mayoría de los alumnos construyeron el triángulo inicial *DEF* con un lado horizontal, casi isósceles y "apuntando" hacia abajo, a fin de que el triángulo *ABC* quedara tal como había estado siendo dibujado en las dos actividades anteriores (y como se muestra en el ejemplo de la figura 6 de la izquierda): con un lado horizontal casi isósceles y apuntando hacia arriba.

## Sobre la función de arrastre

Como ya se mencionó con anterioridad, la función de arrastre es la característica principal del software de geometría dinámica. Sin embargo, esta función no es aprehendida automáticamente por parte de los alumnos (Larios, 2003; Olivero, 2003a), sino que requiere un desarrollo cognitivo, y este impedimento está relacionado incluso con aspectos relativos a la rigidez geométrica.

Una de las funciones que se le otorgan es la de validación de las construcciones por medio del *examen de arrastre*. Sin embargo, en la implementación que se realizó, resultó muy común que este arrastre se utilizara de una manera visual como herramienta física que tiene como finalidad el "arreglar" o "acomodar" las construcciones realizadas. Esto muestra la preponderancia de los aspectos figurales y una falta de desarrollo cognitivo que no permite incluso la diferenciación entre figura y dibujo, pues sólo se consideran la existencia de estos últimos en la pantalla de la computadora.

Ante esta situación, la potencialidad dinámica del software se pierde en la búsqueda de dibujos que convenzan a los alumnos, pero sin utilizar dibujos dinámicos que se acerquen a la noción de *figura*. De esta manera, sin el cuidado adecuado, el software se puede convertir incluso en un obstáculo para la aprehensión de la noción de figura, pues al ser más fácil "acomodar" los objetos geométricos para que visualmente convenzan (es decir, que parezcan ser lo que se pretende), se facilita aún más la tendencia a ignorar las propiedades geométricas de tales objetos y las relaciones que tienen entre sí. Evidentemente, la utilización de propiedades para una justificación deductiva también se dificultaría.

## Sobre las justificaciones de los alumnos

Retomando un poco la última parte del párrafo anterior, el uso del arrastre como herramienta física que proporciona experiencia empírica puede llevar a que los alumnos proporcionen justificaciones de sus construcciones, de las propiedades que observan y de los procedimientos de construcción que propongan que tengan una base en la experiencia directa, eliminando la necesidad de una justificación formal.

En el caso de la implementación que se realizó, ocurrió más o menos así, ya algunos de los equipos proporcionaron justificaciones basadas en sus experiencias obtenidas de la computadora, o bien justificaciones que, más que describir propiedades observadas, describían el procedimiento realizado.

Sin embargo, el uso de deducciones no queda fuera del alcance de los alumnos, pues aunque sea en un nivel básico, sí pueden aparecer. Además, las actividades propuestas están estructuradas para que las propiedades observadas en algunas de ellas se utilicen para justificaciones de otras más adelante. Las discusiones grupales para exponer las observaciones y las justificaciones, así como para defender los puntos de vista propios, son momentos útiles para lograr esto y, en ellos, la participación del profesor como guía y coordinador es sumamente válida.

## CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado algunas consideraciones relacionadas con la geometría dinámica y los micromundos, a fin de proponer algunas actividades que pueden servir para aproximarse al estudio del paralelismo y al desarrollo del razonamiento deductivo en el nivel medio. Además, se ha mostrado la importancia de que el profesor considere los fenómenos que aparecen cuando se utiliza software para geometría dinámica, con el propósito de que esté preparado para ello y no abandone la empresa por desánimo al encontrarse con situaciones o problemáticas que le resulten nuevas e imprevistas.

Como ya se mencionó, es importante el uso y énfasis de figuras en posiciones no estándares, pues de otra manera, la identificación y la definición de éstas pueden complicarse al negarse los alumnos a identificar correctamente algunas figuras que no estén en esas posiciones (como es el caso de la no identificación de las diagonales externas de polígonos cóncavos, de triángulos rectángulos que no tienen los catetos con orientaciones horizontal-vertical, de las alturas externas de triángulos obtusos, de cuadrados que tampoco tienen la orientación horizontal-vertical y que repentinamente dejan de serlo y se convierten en rombos, y un largo etcétera).

Las posibilidades que ofrece el uso de la geometría dinámica en el salón de clases del nivel medio parecen ser muchas; sin embargo, el beneficio no es automático, pues mientras se logra abordar algunos problemas relacionados con el aprendizaje, aparecen otros. Es importante que el profesor esté consciente de esto y no tenga la idea de que basta únicamente con trasladar las actividades pensadas para realizarse con papel y lápiz (o alguna otra tecnología), pues algunas situaciones, que podrían ser problemas de gran riqueza al abordarlos con papel y lápiz, pueden resultar triviales al abordarlos con geometría dinámica y viceversa.[15] Además, el profesor debe estar prevenido respecto del uso de justificaciones empíricas y debe buscar la manera de generar la necesidad de utilizar justificaciones deductivas que se salgan del mero *examen de arrastre*. Mucha de la intención de las primeras secciones y la anterior de este trabajo es precisamente señalar estos aspectos.

Es importante continuar con las investigaciones y las reflexiones sobre el im-

[15] Para un ejemplo sencillo al respecto, el lector puede pensar en lo trivial que resultaría prolongar el lado de un polígono utilizando papel y lápiz, lo cual requiere un pensamiento diferente si se intenta realizar la misma acción en geometría dinámica sobre un polígono ya construido en la pantalla de la computadora.

pacto de estas tecnologías en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en cualquier nivel educativo. Por lo pronto, la implementación de estas actividades con fines de investigación se continuará, a fin de profundizar en el estudio de algunos de los fenómenos mencionados anteriormente.

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al personal de la Escuela Secundaria "Mariano Matamoros", en particular a la profesora Noraísa González González (profesora del grupo) y a la doctora Claudia Acuña S. por sus comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 2, pp. 146-176.

—— (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*, Colombia, Una Empresa Docente y Universidad de los Andes.

Boero, P., R. Garuti, E. Lemut y M.A. Mariotti (1996), "Challenging the Traditional School Approach to Theorems: A Hypothesis about the Cognitive Unity of Theorems", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Universitat de València, vol. 2, pp. 113-120.

Chevallard, Y. (2000), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Argentina, Aique Grupo Editorial.

De Villiers, M. (1993), "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Épsilon*, núm. 26, pp. 15-30. [Trad. del inglés: "The Role and Function of Proof in Mathematics", *Pythagoras*, vol. 24, núm. 17, 1990.]

Dreyfus, T. (1994), "The Role of Cognitive Tools in Mathematics Education", en R. Biehler, R.W. Scholz, R. Straesser y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 201-211.

Edwards, L.D. (1998), "Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17, núm. 1, pp. 53-78.

Fischbein, E. (1993), "The Theory of Figural Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, pp. 139-162.

Godino, J.D. y C. Batanero B. (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núm. 3, pp. 325-355.

Godino, J.D. y A.M. Recio (1997), "Meaning of Proofs in Mathematics Education", en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Universidad de Helsinki, Finlandia, vol. 2, pp. 313-320.

Goldenberg, E.P. y A.A. Cuoco (1998), "What is Dynamic Geometry?", en R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, New Jersey, Lawrence Erlbaum, pp. 351-367.

Hanna, G. (1996), "The Ongoing Value of Proof", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Universitat de València, vol. 1, pp. 21-34. (Trad. al castellano en http://www.uaq.mx/matemáticas/articulos.html?0102.)

Hersh, R. (1993), "Proving is Convincing and Explaining", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, núm. 4, pp. 389-399.

Hölzl, R. (1995), "Between Drawing and Figure", en R. Sutherland y J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Berlín, Springer, pp. 117-124.

Hoyles, C. y R. Noss (1987), "Synthesizing Mathematical Conceptions and their Formalization through the Construction of a Logo-based School Mathematics Curriculum", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 18, núm. 4, pp. 581-595.

—— (2003), "Microworlds: The Next Generation", en E. Filloy Y. (coord.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, México, Cinvestav-FCE, pp. 112-120.

Hoyles, C. y K. Jones (1998), "Proof in Dynamic Geometry Contexts", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 121-128.

Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núms. 1-2, pp. 165-210.

Larios O., V. (2003), "Geometrical Rigidity: An Obstacle in Using Dynamic Geometry Software in a Geometry Course", en M.A. Mariotti (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics*

*Education*, Bellaria, Italia, Edizioni Plus, Pisa University Press. (Disponible en http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_LariosOsorio_cerme3.pdf.)

Maracci, M. (2001), "Drawing in the Problem Solving Process", en J. Novotná (ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Praga, Charles University, pp. 478-488.

Mariotti, M.A. (2000), "Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, pp. 25-53.

Nagel, E. y J.R. Newmann (1979), *El teorema de Gödel*, España, Tecnos.

Olivero, F. (2003a), "Cabri as Shared Workspace within the Proving Process", en N.A. Pateman, B.J. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Honolulú, vol. 3, pp. 429-436.

------- (2003b), *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*, Tesis de doctorado, Bristol, University of Bristol, Graduate School of Education.

Papert, S. (1982), *Desafío a la mente. Computadoras y educación*, Buenos Aires, Galápago.

Sánchez S., E. (2003), "La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 2, pp. 27-54.

Straesser, R. (2001), "Cabri-Géométre: Does Dynamic Geometry Software Change Geometry and its Teaching and Learning?", *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, vol. 6, núm. 3, pp. 319-333.

Sutherland, R. y N. Balacheff (1999), "Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics", *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, vol. 4, pp. 1-26.

Thurston, W.P. (1994), "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 30, núm. 2, pp. 161-177.

Ursini L., S. (1993), *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in Logo*, Tesis de doctorado, Londres, Universidad de Londres, Instituto de Educación.

## DATOS DEL AUTOR

**Victor Larios Osorio**

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, México

vil@uaq.mx

# Prototipos y estereotipos en geometría

Sara Scaglia y Susana Moriena

**Resumen:** En este trabajo se aborda un análisis teórico destinado a esclarecer la pertinencia del uso de dos expresiones terminológicas, *ejemplo prototípico* y *representación gráfica estereotipada,* en el estudio de un problema de investigación sobre el aprendizaje de conceptos geométricos.

La expresión "ejemplo prototípico" se utiliza mucho en el estudio de las dificultades de los alumnos para identificar figuras geométricas y remite a modelos esquemáticos de imágenes de estas figuras.

Los alumnos utilizan estos modelos como puntos de referencia cognitivos y se construyen, entre otras razones, por la utilización frecuente de representaciones gráficas estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos.

La distinción entre *prototipo* y *representación gráfica estereotipada* permite diferenciar entre el esquema mental elaborado por el alumno y el dibujo (habitualmente utilizado en nuestro medio cultural) realizado sobre algún soporte físico que da lugar a la formación de dicho esquema mental.

*Palabras clave:* conceptos geométricos, aprendizaje, prototipo, representación gráfica estereotipada, análisis conceptual.

**Abstract:** In this paper, we tackle a theoretical analysis with the object of clarifying the use of two terminologycal expressions, *prototypical example* and *stereotyped graphic representation,* in the study of a research problem on the learning of geometrical concepts.

The expression "prototypical example" is very used in the study of students' difficulties to identify geometrical figures and refers to schematic models of them.

These models are used by students as cognitive reference points and are constructed, among others reasons, by the frequent use of stereotyped graphic representations during geometrical concepts teaching.

The distinction between *prototype* and *stereotyped graphic representation*

Fecha de recepción: 9 de enero de 2005.

allows to differentiate the mental diagram elaborated by the student from the drawing (habitually used in our cultural environment), performed about some physical support, which favours the mental diagram's formation.

*Keywords:* geometrical concepts, learning, prototype, stereotyped graphic representation, conceptual analysis.

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo es un estudio teórico que tiene como objetivo esclarecer el significado atribuido a los términos utilizados en una investigación sobre el aprendizaje de conceptos geométricos. Nos proponemos reflexionar acerca de la adecuación de dos expresiones terminológicas diferentes en el estudio de un problema de investigación, que consiste en el análisis de las dificultades que tienen los alumnos para reconocer un concepto geométrico cuando su representación gráfica difiere (por ejemplo, en el cambio de posición) de la que usualmente han trabajado en el medio escolar.

Las diversas investigaciones revisadas utilizan el término *prototipo* o *ejemplo prototípico* para referirse a los modelos de imágenes que tienen los alumnos de los conceptos geométricos. Ante la presencia de una representación gráfica de un concepto (un dibujo), comparan esta representación con el modelo del concepto. Si el dibujo posee características visuales distintas a las del modelo, algunos alumnos no reconocen o rechazan esa representación gráfica sin analizar si responde o no a la definición del concepto. Como se pondrá de manifiesto más adelante, en estas investigaciones se presentan algunas diferencias en el uso del término *prototipo,* el cual consideramos necesario aclarar.

Por otra parte, si bien prototipo hace referencia a un modelo de imagen del alumno, este modelo se forma a partir de los sucesivos encuentros con una representación gráfica que posee determinados atributos, que hemos denominado, en nuestra investigación, *representación gráfica estereotipada*.

Esta última expresión no se utiliza por lo general en las investigaciones revisadas. Sin embargo, aquí argumentamos que su uso es necesario, porque permite distinguir entre el esquema mental del alumno (prototipo) y la representación gráfica que dio lugar a la formación de dicho esquema (representación gráfica estereotipada).

Estas representaciones estereotipadas son las que encontramos habitualmente. Es muy sencillo dibujar un rombo a partir del trazado de sus diagonales perpendiculares; algo similar sucede cuando se trata de dibujar un triángulo rectángulo, un cuadrado o un rectángulo. Los bordes horizontal/vertical del papel se utilizan como guías para el trazado de ángulos rectos. También predominan las representaciones estereotipadas en las formas geométricas que observamos en nuestro entorno. Pensemos en los "rectángulos" observados en aberturas, paredes, muebles o cajas: casi siempre presentan un lado horizontal. Por otra parte, el prototipo de barrilete tiene forma de rombo y se construye de tal manera que la persona que lo remonta lo observa en su posición estereotipada.

Nuestro objetivo será reflexionar acerca de la adecuación de las dos expresiones: *representaciones gráficas estereotipadas* y *ejemplos prototípicos* en el estudio del problema de investigación planteado.

Una de las mayores dificultades con que tropieza la investigación educativa es la "enorme polisemia de buena parte de los conceptos centrales que se utilizan en estos estudios" (Rico, 2001, p. 185). El análisis conceptual trata de resolver esta dificultad, ya que permite al investigador convertir los conceptos en piezas teóricas precisas para el estudio que pretende desarrollar.

> El análisis conceptual permite una reflexión previa sobre la cuestión que se quiere investigar, caracterizando aquellos puntos claves que delimitan el problema en estudio y las ideas, conceptos y teorías sobre los que se quiere abordar su resolución. Trata de eliminar las inconsistencias derivadas de la falta de precisión en el significado de los conceptos utilizados (Rico, 2001, p. 186).

En las secciones siguientes presentamos, en primer lugar, una revisión de investigaciones que aportan elementos teóricos para el estudio del problema de investigación. Posteriormente, desarrollamos un análisis conceptual de los términos *estereotipo* y *prototipo*, respectivamente. En las conclusiones, abordamos la conveniencia de la distinción entre ambos términos.

## REVISIÓN DE INVESTIGACIONES PREVIAS

Laborde y Capponi (1994) destacan la necesidad de distinguir entre objeto geométrico y dibujo y afirman que la enseñanza de la geometría ignora las relaciones existentes entre ambos. "Un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas y, en particular, la percepción interviene en la construcción de una interpretación, siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva" (Laborde, 1996, p. 69). El dibujo puede favorecer o, por el contrario, entorpecer la lectura geométrica, al atraer la atención sobre elementos del dibujo no pertinentes para esa lectura.

Estos autores hablan de un *dominio del funcionamiento* del dibujo: "Conjunto de propiedades geométricas representadas por ciertas propiedades espaciales del dibujo." "Las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como que remiten a las propiedades del objeto, el dibujo está ligado a un *dominio de interpretación*. La posición del dibujo en la hoja de papel está más allá del dominio de interpretación de los dibujos." Para estos autores, el dominio de interpretación en la enseñanza de la geometría es comúnmente la geometría euclidiana. "Ciertos problemas encontrados en los alumnos se deben precisamente a que trabajan con un dominio de interpretación distinto al de la geometría euclidiana."

Por su parte, Fischbein (1993) denomina a las figuras geométricas *conceptos figurales*, porque tienen una noble naturaleza: conceptual y figural. La naturaleza conceptual alude a que se trata de entidades ideales abstractas, conceptos genuinos definidos formalmente. La naturaleza figural de las figuras geométricas se refiere a que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud). "Por lo tanto, una figura geométrica puede describirse a partir de sus propiedades *intrínsecamente* conceptuales. Sin embargo, una figura geométrica *no* es un mero concepto, es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen: incluye una representación mental de propiedad espacial" (Fishbein, 1993, p. 141). Haciendo referencia a las implicaciones que su análisis tiene para la enseñanza, afirma que:

> ...*el proceso de construir conceptos figurales en la mente del estudiante no debería ser considerado un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría*. La integración de propiedades figurales y conceptuales en estructuras mentales unitarias, con el predominio de las limitaciones conceptuales sobre las figurales, no es un proceso natural. Debería constituir una principal, continua y sistemática preocupación del docente (Fischbein, 1993, p. 156).

Sin embargo, el tratamiento que se da a los conceptos geométricos en clase dista de ser el adecuado. Berthélot y Salin (1993/1994) afirman que la enseñanza del espacio y de la geometría en la escuela primaria se apoya fundamentalmente sobre una presentación ostensiva de los conocimientos espaciales y el espacio

–geométricos–. Entre las prácticas más difundidas mencionan la ostensión asumida y la ostensión encubierta. En la primera, "el docente presenta directamente los conocimientos, apoyándose sobre la observación 'dirigida' de una realidad sensible o de una de sus representaciones, y supone a los alumnos capaces de apropiarse y de entender el empleo en otras situaciones". En la segunda, el docente no presenta directamente los conocimientos, los disimula detrás de la ficción de que es el propio alumno quien los descubre a partir de los objetos espaciales sometidos a su observación o a su acción. En ambos casos, la responsabilidad de establecer las relaciones entre los conceptos enseñados y la realidad sensible con la que estos conceptos se relacionan recae en el alumno. Berthélot y Salin presentan algunos ejemplos de las dificultades que tienen los alumnos para establecer estas relaciones, las cuales reflejan un déficit o una mala adaptación de sus conocimientos particulares.

Otras investigaciones que abordan algunas confusiones habituales en los alumnos durante el aprendizaje de conceptos geométricos se apoyan en la teoría del prototipo de Rosch. Esta teoría proporciona una explicación sobre la formación de conceptos naturales. Los prototipos son los ejemplos que tienen un mayor "parecido familiar" con el resto de ejemplos del concepto. Un prototipo es "el ejemplar, real o ideal, con los atributos más frecuentes" (Pozo, 1993, p. 97) y es considerado por los sujetos como un miembro más representativo de la categoría que otros miembros.

Schwarz y Hershkowitz (1999, p. 364) afirman que: "cada concepto tiene uno o varios ejemplos prototípicos que se adquieren primero; estos ejemplos prototípicos son en general los que tienen la mayor lista de atributos, todos los atributos críticos del concepto como también algunos *atributos propios* (aquellos atributos que sólo tienen los ejemplos prototípicos)".

Algunos atributos propios de ejemplos prototípicos mencionados por Hershkowitz (1989, p. 73) son los siguientes:

1. "la posición horizontal/vertical del ángulo recto del triángulo rectángulo prototípico";
2. "los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales del cuadrado como ejemplo de cuadrilátero";
3. para el concepto de altura, el atributo de estar dentro del triángulo.

Es posible observar algunas diferencias en los ejemplos anteriores. Si bien los ejemplos 2 y 3 hacen referencia específica a aspectos conceptuales de los conceptos involucrados,[1] el primer ejemplo hace referencia a una posición particular de la representación gráfica del concepto geométrico involucrado. Más adelante retomaremos esta idea.

Si tomamos como ejemplo el cuadrado, este cuadrilátero tiene (desde un punto de vista conceptual) un mayor parecido familiar con otros cuadriláteros: posee ángulos rectos como el rectángulo y lados iguales como el rombo. Por esa razón, podría identificarse un cuadrado como prototipo de los cuadriláteros. Esta afirmación coincide en parte con la incluida anteriormente, en la que Hershkowitz (1989) considera que los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos iguales constituyen atributos propios del cuadrado, y entonces afirma que esta figura geométrica constituye un ejemplo prototípico de cuadrilátero.

El hecho de que un cuadrado sea considerado como ejemplo prototípico de los cuadriláteros se justifica por razones de índole conceptual: posee atributos propios que son compartidos por algunos cuadriláteros (aunque no por todos). Esto, sin embargo, no tiene relación con la posición particular que puede presentar una representación gráfica determinada del cuadrado.

Matos (1992, p. 107) afirma que son bien conocidos por los investigadores los efectos prototípicos originados por modelos esquemáticos de imágenes. Señala que las características principales de estos prototipos son las siguientes:

*1.* Una posición preferida; a saber: triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos deben tener una base horizontal...
*2.* Simetría; por ejemplo, no se reconocenlos triángulos obtusángulos con sus bases en un lado más pequeño, o un triángulo rectángulo se piensa como un medio triángulo...
*3.* Una forma balanceada globalmente; a saber: muchos estudiantes no reconocen triángulos “delgados”, triángulos “punteagudos”, o cuadrados extremadamente pequeños.

Las características mencionadas en 1 y 3 se relacionan con aspectos que son irrelevantes desde el punto de vista matemático: la posición (1) y las dimensiones (3) de una figura. En cambio, la presencia de ejes de simetría (mencionada en 2) constituye un atributo conceptual.

De cualquier modo, estas características (irrelevantes o no desde un punto de vista matemático) ejercen una influencia similar en la interpretación de los suje-

[1] Un triángulo tiene las alturas interiores si y sólo si sus tres ángulos interiores son agudos.

tos que evalúan las representaciones gráficas de las figuras geométricas a partir de estos modelos que son puntos de referencia cognitivos.

Gutiérrez y Jaime (1996) afirman que:

> ...en la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona, desempeñan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como en el extra escolar. Con frecuencia, estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar y se convierten en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos.

Así, observamos que el uso de la expresión *ejemplo prototípico* se aplica (en estos casos) a ejemplos básicamente diferentes. Por un lado, una figura geométrica posee atributos conceptuales determinados y, por tanto, es considerada como ejemplo prototípico. Por otro lado*, la representación gráfica* de una figura geométrica posee determinados atributos (por ejemplo, una posición o una relación determinada entre sus dimensiones) y, por tanto, se considera también como ejemplo prototípico.

Es posible considerar entonces que la formación de los prototipos deriva de distintas fuentes relacionadas con características de las representaciones gráficas utilizadas comúnmente. Por un lado, distinguimos los que surgen por la presencia de características conceptuales específicas, que responden a determinado ordenamiento de los contenidos que posiblemente atiendan al desarrollo cognitivo de los alumnos. Por esa razón, se presentan figuras sencillas como cuadrados, rectángulos y triángulos acutángulos en los primeros años escolares. Por otro lado, los prototipos pueden surgir por determinadas características del dibujo, irrelevantes desde el punto de vista matemático, pero que están instaladas en la cultura por economía propia (por ejemplo, es más sencillo dibujar figuras con base horizontal o un rombo a partir de sus diagonales).

A continuación realizamos una interpretación de las afirmaciones de los distintos investigadores considerados. En primer lugar, reconocemos la necesidad de distinguir entre figura geométrica y el dibujo (representación gráfica en papel u otro soporte físico) de ésta. En segundo lugar, reafirmamos la característica peculiar de las figuras geométricas de poseer una doble naturaleza, conceptual y figural, y que, en situaciones en las que el dominio de los conocimientos geométricos es insuficiente, la segunda puede imponerse sobre la primera. También rescatamos de Fischbein la necesidad de promover mediante la enseñanza la formación de estructuras mentales en las que la componente conceptual imponga limitaciones a la figural. Sin embargo, tal como afirman Berthélot y Salin, en las prácticas docentes habituales no se propicia la formación de relaciones entre los conceptos geométricos y el espacio. Por último, retomamos la idea de prototipo como modelo esquemático de imagen utilizada por los alumnos como punto de referencia con el que comparan las representaciones gráficas de las figuras geométricas.

Vamos un poco más allá para considerar que estos prototipos son entidades mentales, alejándonos hasta cierto punto de las interpretaciones que ha establecido Rosch.[2] Si bien surgen a partir de representaciones gráficas utilizadas predominantemente en la enseñanza, se constituyen en entidades abstractas que residen en la mente del estudiante.

Preferimos utilizar una denominación diferente para las representaciones gráficas de las figuras con características específicas (conceptuales o propias de las figuras) que dan lugar a la formación de prototipos. Reservamos la expresión *representaciones gráficas estereotipadas* para estas representaciones.

## ESTEREOTIPOS: ELEMENTOS PARA UN ANÁLISIS CONCEPTUAL

En este apartado abordamos el estudio del término *estereotipo*, utilizando diccionarios de la lengua española y otros diccionarios correspondientes a disciplinas en las que este término tiene significados específicos. En el cuadro 1 incluimos los diversos significados recogidos en cada caso.

En los significados del cuadro 1 aparecen (al menos) dos ideas recurrentes: la repetición (definiciones 3, 4, 11) y la noción de creencia (definiciones 2, 7, 8, 9, 10) compartidas por un grupo cultural determinado.

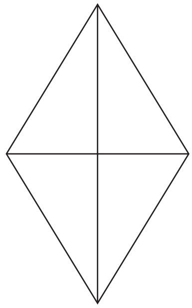
En el problema de investigación definido en la introducción, la repetición se manifiesta en que los alumnos se encuentran en distintas oportunidades con las representaciones gráficas estereotipadas. A modo de ejemplo, en una revisión que hemos realizado sobre libros de texto de nivel primaria, todas las representaciones gráficas observadas del rombo (desde 1º a 6º año de EGB) presentan la posición estereotipada (es decir, con las diagonales paralelas a los bordes horizontal y vertical de la hoja).

[2] En Pozo (1993) se hace referencia a la ambigüedad atribuida al concepto de prototipo y se menciona el rechazo explícito de Rosch a redefinir la noción como si hiciera referencia a un miembro específico de la categoría o a una estructura mental.

**Cuadro 1** Distintos significados atribuidos a los términos estereotipo y estereotipado

| Diccionario | Término | Término |
|---|---|---|
| *Etimológico* (Corominas y Pascual, 1984) | Estereotipia | *1.* Antes *estereotipa*, con sus derivados *estereotípico, estereotipar y estereotipador* [...] "impresión, huella, molde". |
| Real Academia Española (1992) | Estereotipo | *2.* Imagen o idea aceptada comúnmente por un grupo o sociedad con carácter inmutable. |
| | Esterotipar | *3.* Fijar mediante su repetición frecuente un gesto, una frase, una fórmula artística, etcétera. |
| | Estereotipado | *4.* adj. fig. Dícese de los gestos, fórmulas, expresiones, etc., que se repiten sin variación. |
| *Uso del Español* (Moliner, 1996) | Estereotipado | *5.* Se aplica a la expresión pluriverbal que tiene una forma fija con la cual se inserta en el lenguaje sin formarla reflexivamente para cada caso. |
| | | *6.* Se aplica al gesto, expresión, actitud, etc., que se adoptan formulariamente y no son expresión de un sentimiento efectivo. |
| *Sociología* (Fairchild, 1987) | Estereotipado | *7.* Convertido en estereotipo. Simplificado en una estructura tipo. |
| | Estereotipo | *8.* Creencia popular. Imagen o idea aceptada por un grupo, de ordinario enunciada en palabras y cargada de emoción. Concepción simplificada e incluso caricaturizada de un personaje, personalidad, aspecto de la estructura social o programa social que ocupa en nuestras mentes el lugar de imágenes exactas. Lugar común. |
| | Respuesta estereotipada | *9.* Respuesta configurada por una definición de la situación o por un concepto del papel social que ya se hallaban establecidos en la mente de quien responde. |
| | Respuesta estereotipo | *10.* Respuesta en forma de palabras o actos que, por las creencias populares de un grupo o sociedad, se ofrecen a un estímulo determinado. Se diferencia de las respuestas determinadas por factores no culturales, de situación y psicológicos. |
| *Psicología* (Warren, 1948) | Estereotipia | *11.* Fenómeno patológico que consiste en la repetición interminable de palabras fragmentarias o aparentemente sin sentido o de movimientos o posturas de igual índole. |

**Figura 1** Construcción del rombo a partir de las diagonales



Además, es posible que esta representación gráfica sea la que realiza el profesor en la pizarra, porque es muy sencillo dibujar un rombo a partir de dos segmentos perpendiculares que se cortan en su punto medio (véase la figura 1).

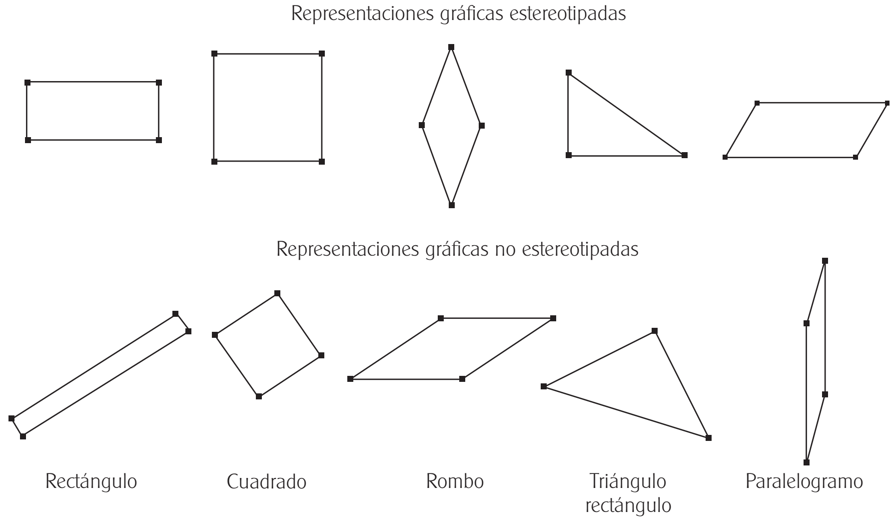
La noción de creencia adoptada en este trabajo es de Ortega y Gasset (1986). Este autor considera que todo aquello que el hombre acepta sin cuestionárselo pertenece al estrato de las creencias. "No llegamos a ellas tras una faena de entendimiento, sino que operan ya en nuestro fondo cuando nos ponemos a pensar sobre algo" (p. 26).

En una indagación realizada (Moriena y Scaglia, 2003), hemos presentado representaciones gráficas de rombos en posiciones diversas a alumnos de 13 años. Los alumnos deben determinar si cada dibujo corresponde a no a la representación gráfica de esta figura geométrica. En general, los alumnos expresan correctamente que las figuras representadas son rombos porque poseen los cuatro lados iguales. Sin embargo, algunos alumnos anteponen a esta afirmación alguna frase que hace referencia a la posición de la figura o al punto de vista adoptado para observarla. Por ejemplo: "si le damos vuelta queda de manera con forma de rombo y además tiene los cuatro lados iguales" (sujeto 35), o "si lo vemos de costado podremos observar que es un rombo con todos sus lados iguales" (sujeto 26).

Estos alumnos conocen correctamente la condición que debe cumplir un cuadrilátero para ser un rombo (cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes). Sin embargo, hacen referencia a la necesidad de observar la figura desde una determinada posición.

La creencia implícita es que el rombo siempre debe presentarse en la posición estereotipada, esto se acepta sin cuestionamiento. Parafraseando a Ortega y Gasset, "cuando se ponen a pensar" si la figura es o no un rombo, la necesidad de que se presente en una posición determinada "opera en el fondo". La

**Figura 2** Algunos ejemplos de representaciones gráficas estereotipadas y no estereotipadas




condición necesaria y suficiente de la definición de rombo (los cuatro lados congruentes) se menciona *a posteriori*.

Como conclusión de las observaciones anteriores, consideramos que algunas figuras geométricas se presentan en nuestro medio cultural mediante *representaciones gráficas estereotipadas*. Esta expresión hace referencia a que son las representaciones gráficas que se presentan con mayor frecuencia (repetición), lo cual da lugar a la creencia de que esa presentación es indispensable para el reconocimiento de la figura geométrica.

En la figura 2 incluimos ejemplos de representaciones gráficas estereotipadas y no estereotipadas de algunas figuras geométricas.

Con respecto al significado etimológico del término estereotipo, en la siguiente sección realizamos algunos comentarios.

## PROTOTIPOS: ELEMENTOS PARA UN ANÁLISIS CONCEPTUAL

En el cuadro 2 recogemos las definiciones de prototipo halladas en tres diccionarios diferentes. No hemos hallado este término en los diccionarios de psicología y de sociología, respectivamente.

**Cuadro 2** Distintos significados para el término prototipo

| Diccionario | Término | Significado |
|---|---|---|
| *Etimológico* (Corominas y Pascual, 1984) | Prototipo | *1.* V. *Tipo* *tipo.* Tomado del lat., "figura, estatua", "carácter de una enfermedad", y éste del griego, "golpe", "huella de un golpe", "carácter grabado", "imagen", "tipo, modelo". |
| Real Academia Española (1992) | Prototipo | *2.* Ejemplar original o primer molde en que se fabrica una figura u otra cosa. |
| | | *3.* El más perfecto ejemplar y modelo de una virtud, vicio o cualidad. |
| | Prototípico | *4.* adj. Perteneciente o relativo al prototipo. |
| *Uso del Español* (Moliner, 1996) | Prototipo | *5.* Ejemplo o modelo. Primer ejemplar de una cosa que sirve de modelo para hacer otras iguales. |
| | | *6.* Ser que reúne en sí en el más alto grado las características de cierto tipo de cosas y puede representarlas. "Es el prototipo del egoísta." |

Los significados del diccionario etimológico para los términos *estereotipo* y *prototipo* guardan cierta similitud. El término "huella" aparece en las dos definiciones. Mientras que los términos que figuran en *estereotipo* (impresión, huella, molde) hacen referencia a una señal que queda al efectuar una acción determinada, algunos términos correspondientes a *prototipo* (golpe, huella de un golpe, carácter grabado) tienen el mismo sentido. Los términos restantes (imagen, tipo, modelo) que figuran en *prototipo* aluden a puntos de referencia que se toman para imitar.

En las definiciones del cuadro 2 encontramos al menos dos acepciones ligeramente diferentes para el término *prototipo*. Por un lado, el *prototipo* se considera el ejemplar que se utiliza como primer modelo para construir otros similares (definiciones 2 y 5). Por el otro, recibe el nombre de *prototipo* el ejemplar que reúne en mayor grado las características de una cualidad o concepto (definiciones 3 y 6).

A continuación, analizaremos la posible relación de cada una de las acepciones anteriores con el problema de investigación planteado en la introducción.

Retomando el ejemplo del rombo, hemos mencionado que la representación gráfica observada usualmente en libros de texto es la que presenta sus diagonales paralelas a los bordes horizontal y vertical del folio. Podemos conjeturar que, durante esos primeros encuentros, el alumno utiliza esa representación gráfica para elaborar un esquema mental que usará como "primer ejemplar", "que sirve como modelo para hacer otros iguales" (parafraseando la definición 5).

La posición particular de la figura es irrelevante desde el punto de vista geométrico. Sin embargo, el alumno puede asumirla como una condición necesaria, ya que está presente en su esquema mental y, por tanto, espera encontrarla en todas las representaciones gráficas del rombo.

Con respecto a la posible relación con la segunda acepción, conjeturamos que el esquema mental que posee constituye: "el más perfecto ejemplar y modelo" de rombo. Otra vez, aunque no haya razones matemáticas para ello, el alumno podría estar influido por la presencia de la representación gráfica estereotipada de manera reiterada.

## REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos examinado dos expresiones diferentes, a fin de analizar su adecuación en el estudio de un problema de investigación.

A partir de la discusión desarrollada en torno a las acepciones diferentes del término *prototipo* halladas en los diccionarios y al uso de la expresión *ejemplo prototípico* por diferentes investigadores, concluimos que un prototipo es una imagen mental.

Desde el punto de vista de la interpretación del alumno, el prototipo de rombo (por ejemplo) posee las diagonales incluidas en las rectas horizontal y vertical, respectivamente. Se trata de la imagen mental que posee el alumno del rombo y se considera como "primer ejemplar" y como "el más perfecto ejemplar".

Por otra parte, esta imagen mental se ha formado a partir del encuentro reiterado con representaciones gráficas de la figura con determinadas características (conceptuales o propias del dibujo). Esta representación gráfica constituye (desde nuestro punto de vista) una representación gráfica estereotipada, porque es la que se encuentra con mayor frecuencia, y forma parte del acervo cultural por diversas razones, entre otras, porque es más adecuada para trabajar en los primeros años de escolaridad o porque simplifica razonablemente la representación gráfica.

La distinción entre *prototipo* (imagen mental) y *representación gráfica estereotipada* (dibujo comúnmente utilizado, instalado en nuestra cultura) aporta nuevos elementos para la discusión de las dificultades de los alumnos. La expresión *ejemplos prototípicos* se ha utilizado en la literatura de investigación (en algunos casos) de manera ambigua o, en todo caso, sin aclarar si se trata de un dibujo o de una entidad abstracta. Tomamos partido por la consideración de *prototipo* como una entidad mental. Reservamos, en cambio, el adjetivo *estereotipado* para las representaciones gráficas utilizadas a menudo por dos razones relacionadas con los significados hallados para el término: la repetición y la creencia culturalmente compartida.

El problema investigado consiste en el análisis de las dificultades que tienen los alumnos para reconocer un concepto geométrico cuando la representación gráfica de ese concepto difiere de la que usualmente han trabajado en el medio escolar.

Una representación gráfica no estereotipada genera en los alumnos una respuesta inadecuada desde el punto de vista matemático. Esta respuesta se origina porque el alumno compara la representación gráfica dada con un esquema mental (prototipo) de la figura geométrica que no coincide con ella.

Las representaciones estereotipadas aparecen con mayor frecuencia en los libros de texto y, muy posiblemente, en los dibujos que realiza el docente en el pizarrón. Los prototipos (esquemas mentales) a que conducen estas representaciones gráficas estereotipadas son fundamentales para el aprendizaje de los conceptos geométricos, ya que constituyen puntos de referencia cognitivos. Sin embargo, constituyen el origen de ciertas dificultades que tienen algunos alumnos durante la identificación de figuras geométricas.

Como consecuencia de este análisis, asumimos que, durante la enseñanza, se debe proporcionar la oportunidad a los alumnos de elaborar prototipos que no estén influidos por características visuales irrelevantes desde el punto de vista matemático. Una manera de alcanzar este objetivo es evitar la utilización exclusiva de representaciones gráficas estereotipadas. El uso de algún software geométrico dinámico para la enseñanza de la geometría podría ayudar a la elaboración de prototipos basados, sobre todo, en características conceptuales relevantes.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos las sugerencias aportadas por Ángel Gutiérrez y Moisés Coriat a una versión previa de este trabajo, las cuales han permitido mejorarlo sustancialmente. Asumimos, por supuesto, la responsabilidad por las dificultades que aún persistan.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berthélot, R. y M.H. Salin (1993/1994), "L'enseignement de la géométrie à l'école primarie", *Grand N*, núm. 53, pp. 39-56. (Extraído de http://did-asp.ti-edu.ch/~dm/ForBase/MET1/2002/10aLezione/materiali/BerthelotSalin2.html.)

Corominas, J. y J.A. Pascual (1984), *Diccionario crítico etimológico castellano hispánico*, Madrid, Gredos.

Fairchild, H.P. (ed.) (1987), *Diccionario de sociología*, México, Fondo de Cultura Económica.

Fischbein, E. (1993), "The Theory of Figural Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 24, pp. 139-162.

Gutiérrez, A. y A. Jaime (1996), "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio", en J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Granada, Comares, pp. 143-170.

Hershkowitz, R. (1989), "Visualization in Geometry. Two Sides of the Coin", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm. 1, pp. 61-76.

Laborde, C. (1996), "Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría", en L. Puig y J. Calderón (eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, pp. 67-85.

Laborde, C. y B. Capponi (1991), "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 14, 12.

Matos, J.M. (1992), "Cognitive Models in Geometry Learning", en J.P. Ponte, J.F. Matos y D. Fernández (eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, Nueva York, Springer Verlag, pp. 93-112.

Moliner, M. (1996), *Diccionario de uso del Español*, Madrid, Gredos.

Moriena, S. y S. Scaglia (2003), "Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 1, pp. 5-19.

Ortega y Gasset, J. (1986), *Ideas y creencias*, Madrid, Alianza Editorial.

Pozo, J.I. (1993), *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Madrid, Morata.

Real Academia Española (1992), *Diccionario de la Lengua Española*, Madrid, Espasa-Calpe.

Schwarz, B. y Hershkowitz, R. (1999), "Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools", *Journal for Research Mathematics Education*, vol. 30, núm. 4, pp. 362-389.

Warren, H.C. (ed.) (1948), *Diccionario de psicología*, México, Fondo de Cultura Económica.

## DATOS DE LAS AUTORAS

**Sara Scaglia**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral Santa Fe, Argentina
scaglia@fhuc.unl.edu.ar

**Susana Moriena**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral Santa Fe, Argentina
smoriena@fhuc.unl.edu.ar

# Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática

Martín Eduardo Acosta Gempeler

**Resumen:** A pesar del gran potencial didáctico del software de geometría dinámica, los profesores de matemáticas experimentan serias dificultades para integrarlo en la enseñanza. En este artículo exponemos la falta de una práctica de referencia como una de las causas de esta situación. Proponemos, entonces, la geometría experimental como práctica de referencia de la geometría dinámica e ilustramos, mediante un ejemplo de resolución de problemas, las nuevas técnicas y tecnologías (en el sentido de la teoría antropológica de la didáctica) que pueden implementarse como parte de esa práctica.

*Palabras clave:* geometría dinámica, resolución de problemas, técnicas y tecnologías, matemática experimental, enseñanza de la geometría.

.

**Résumé:** Malgré le grand potentiel didactique des logiciels de géométrie dynamique, les enseignants ont de sérieuses difficultés pour les intégrer dans l'enseignement. Dans cet article nous soulignons le manque d'une pratique de référence comme une des causes de cette situation. Nous proposons la géométrie expérimentale comme pratique de référence de la géométrie dynamique et nous illustrons, à l'aide d'un exemple de résolution de problèmes, les nouvelles techniques et technologies (dans le sens de la théorie anthropologique du didactique) qui peuvent être développées comme partie de cette pratique.

*Mots clefs:* géométrie dynamique, résolution de problèmes, techniques et technologies, mathématique expérimentale, enseignement de la géométrie.

Fecha de recepción: 9 de enero de 2005.

## LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y LA ENSEÑANZA: NECESIDAD DE UNA NUEVA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA

El software de geometría dinámica ha experimentado un rápido desarrollo y difusión en años recientes y distintos trabajos de investigación resaltan sus potenciales en la enseñanza de las matemáticas (Laborde, 1995; Laborde y Capponi, 1994). Sin embargo, la utilización de la geometría dinámica por parte de los profesores de matemáticas se muestra problemática y compleja. Incluso en las instituciones con condiciones de infraestructura favorables (disponibilidad de equipos y licencias, interés de parte de los profesores), los estudios revelan un uso bastante limitado del software (Ruthven *et al.*, 2004).

Una de las razones que explican esta dificultad es un desequilibrio entre el punto de vista matemático y el punto de vista didáctico entre los usuarios del software de geometría dinámica. A diferencia de otros software de matemáticas, la geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades en la enseñanza; pero como la comunidad matemática no lo ha integrado dentro de su práctica profesional, no se lo reconoce como una herramienta legítima para hacer matemáticas ni se estudian las repercusiones de su utilización en la producción de nuevo conocimiento. En otras palabras, se acepta la necesidad de una nueva práctica de la enseñanza de las matemáticas que introduzca la utilización de la geometría dinámica, pero no la necesidad de una nueva práctica de las propias matemáticas que utilice esta herramienta.

Tal como lo señala la teoría antropológica de la didáctica (TAD) (Bosch y Chevallard, 1999), los puntos de vista didáctico y matemático no pueden tomarse de manera independiente; ambos forman parte de una misma totalidad: el estudio de las matemáticas. Toda praxeología didáctica depende de una praxeología matemática que pretende construir y, a su vez, toda praxeología matemática implica una praxeología didáctica que permita su nacimiento en la práctica. Pretender modificar la praxeología didáctica para utilizar el software sin modificar la praxeología matemática es una tarea imposible: el profesor de matemáticas se verá enfrentado a una forma de trabajo de los alumnos que no podrá reconocer legítimamente como trabajo matemático, pues difiere de la praxeología matemática que él debe enseñar y, por lo tanto, terminará restringiendo a un mínimo la intervención del software en el trabajo matemático de los alumnos.

Por otra parte, la misma teoría advierte sobre la imposibilidad de introducir nuevos objetos ostensivos[1] dentro de una praxeología matemático/didáctica, sin que se dé una reestructuración global de dicha praxeología (Bosch y Chevallard, 1999). Precisamente este fenómeno es el que enfrentamos al tratar de introducir la geometría dinámica en la enseñanza. La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utiliza nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre el papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. ¿Cuáles son las consecuencias matemáticas de la utilización de estos nuevos objetos ostensivos? Es decir, ¿qué técnicas matemáticas pueden emplear estos nuevos objetos dinámicos, y qué tecnologías utilizar para justificar y explicar este empleo? Las respuestas a estas preguntas son indispensables para enfrentar la problemática de la utilización de la geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas.

Podemos resumir diciendo que para poder *enseñar* matemáticas utilizando la geometría dinámica, primero debemos *hacer* matemáticas utilizando la geometría dinámica. Por lo tanto, es indispensable desarrollar una nueva práctica de las matemáticas y no sólo de su enseñanza. Necesidad que incluye la identificación de nuevas técnicas y tecnologías (en el sentido de la teoría antropológica de la didáctica) que utilizan la geometría dinámica, su difusión y su discusión en el seno de la comunidad matemática y de profesores de matemáticas.

Como los programas de geometría dinámica no nacieron como parte de la práctica de los matemáticos profesionales, no puede contarse con bibliografía de referencia que describa su utilización matemática. Por consiguiente, me he propuesto poner a prueba el potencial matemático del programa Cabri, resolviendo problemas no rutinarios de geometría plana.[2] El trabajo que presento a continuación busca sintetizar los principales resultados de ese esfuerzo, y el nombre de esa nueva práctica es geometría dinámica experimental.

El profesor Jonathan Browein[3] habla de la necesidad de reconocer la utiliza-

[1] La TAD postula que en el trabajo matemático se manipulan dos clases de objetos: los objetos ostensivos son aquellos que tienen una materialidad y pueden ser aprehendidos por los sentidos, mientras que los objetos no ostensivos no tienen ninguna materialidad. Estos dos tipos de objetos dependen uno del otro y no pueden existir por separado.

[2] En la página web tecfa.unige.ch\problemes pueden encontrar ejemplos de algunos de esos problemas.

[3] http://www.cecm.sfu.ca/organics/vault/expmath/expmath/html/expmath.html, página web consultada en abril de 2005.

ción de computadoras en la investigación matemática como una práctica legítima, para lo cual propone definir las matemáticas experimentales como aquellas que:

1. Utilizan la computadora para generar datos y poner a prueba sus conjeturas.
2. Hacen énfasis en los procesos de construcción del conocimiento más que en su formalización.
3. Reconocen las ventajas de la formalización del conocimiento, pero no consideran dicha formalización como condición indispensable para la investigación y reconocen la legitimidad del conocimiento validado por la experiencia, en espera de una posible formalización.

Adaptando esta definición, la geometría dinámica experimental puede definirse como una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares. La invalidación de una conjetura en geometría experimental puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo. Las conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal. Aunque una figura dinámica no puede constituir una demostración de la validez de una conjetura, sí puede contribuir a la construcción de una demostración formal, pues permite encontrar relaciones que pueden constituir encadenamientos lógicos de dicha demostración.

A continuación trataré de ilustrar estas afirmaciones mediante un ejemplo de resolución de un problema de geometría.

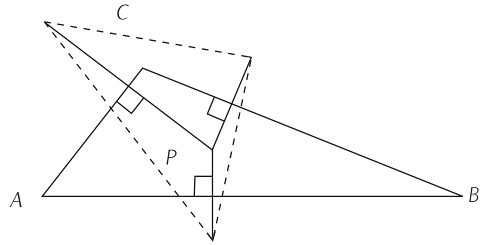
## EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA NO RUTINARIO DE GEOMETRÍA UTILIZANDO LA GEOMETRÍA DINÁMICA

### Planteamiento del problema

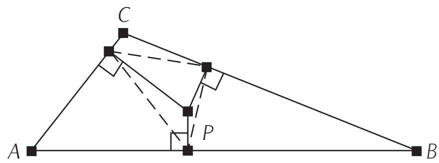
Dado un triángulo cualquiera ABC y un punto cualquiera P, ¿cuál es el lugar geométrico de puntos P tales que su triángulo simétrico-lateral y su triángulo antipedal sean perspectivos?

## Definiciones:[4]

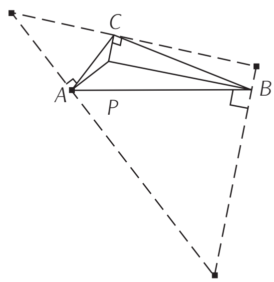
Triángulo simétrico-lateral: dado un triángulo ABC y un punto P, el triángulo simétrico-lateral de P con respecto a ABC es el triángulo formado por los puntos simétricos de P con respecto a los lados *a*, *b* y *c*.



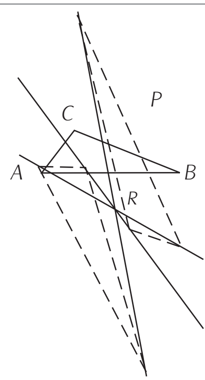

Triángulo pedal: dado un triángulo ABC y un punto P, el triángulo pedal de P con respecto a ABC es el triángulo formado por los pies de las perpendiculares a los lados *a*, *b* y *c* que pasan por P.




Triángulo antipedal: dado un triángulo ABC y un punto P, el triángulo antipedal de P con respecto a ABC es el triángulo tal que ABC es pedal de P con respecto a él.




Triángulos perspectivos: dos triángulos se consideran perspectivos si las rectas que unen sus vértices respectivos son concurrentes. En la imagen pueden verse el triángulo simétrico-lateral de P (punteado) y el triángulo antipedal de P (punteado grueso) perspectivos, el punto de concurrencia de las tres rectas es el punto R.




[4] A fin de facilitar la lectura, en todas las figuras la forma y la posición del triángulo ABC se mantienen invariables. Sin embargo, también se comprobaron todas las propiedades enunciadas deformando el triángulo ABC.

### Identificación de la forma del lugar geométrico. Técnica de detección de puntos

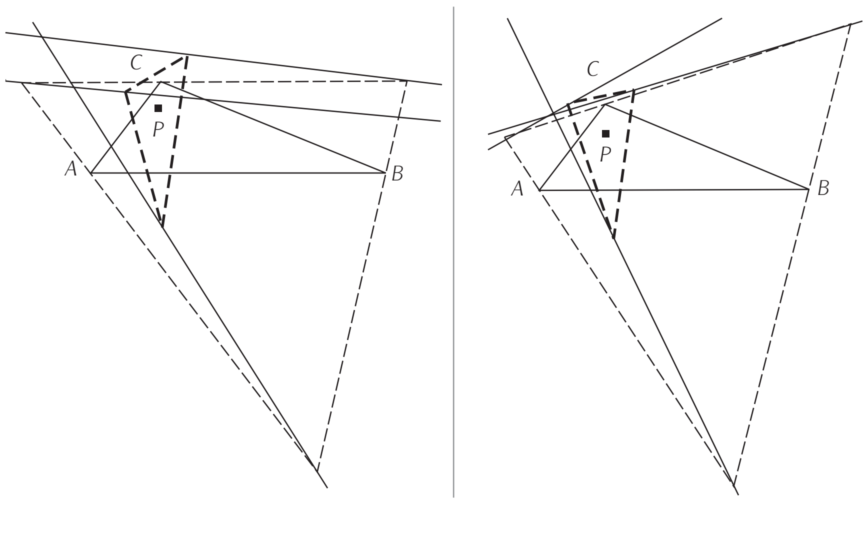
Como es corriente en un problema de lugar geométrico, necesitamos ubicar gráficamente algunos puntos de éste con el propósito de identificar la forma y el grado de la curva solución.

La complejidad de las construcciones que implica este problema hace que su tratamiento con papel y lápiz sea sumamente costoso en tiempo y atención. En cambio, la geometría dinámica nos permite hacer una construcción que puede ajustarse mediante el desplazamiento del punto P hasta obtener visualmente la condición de concurrencia, como se muestra en la figura 1. Es decir, construimos el triángulo ABC (de trazo continuo en la figura), el punto P y los triángulos simétrico-lateral (punteado grueso) y antipedal de P (en punteado delgado) y trazamos las rectas que unen los vértices correspondientes de los dos últimos triángulos. Luego arrastramos P hasta una o varias posiciones en las que dichas rectas son concurrentes.

Se plantean entonces dos dificultades: primero, cómo asegurar que nuestra percepción visual de la concurrencia es lo suficientemente precisa y, segundo, en el caso de tener una precisión aceptable, cómo guardar una memoria de las posiciones de P.

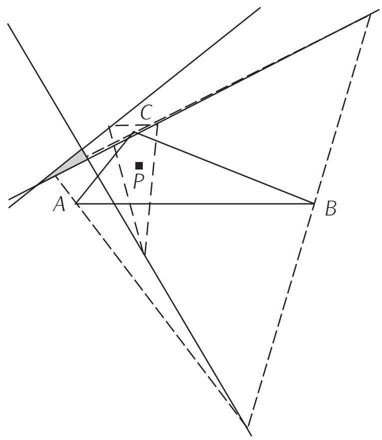
Para resolver la primera dificultad, podemos pedir a Cabri que dibuje los puntos de intersección de las tres rectas que unen los vértices correspondientes de

**Figura 1**



los triángulos simétrico-lateral y antipedal. Estos puntos dan una mejor idea de la concurrencia de las rectas, pero aún no nos permiten determinar el grado de precisión de nuestro dibujo. En cambio, si tomamos el triángulo formado por esos puntos de intersección (que llamaremos en adelante "triángulo de concurrencia"), podemos considerar el perímetro de dicho triángulo como una medida de la exactitud de la construcción, pues cuando el perímetro sea 0, necesariamente las rectas serán concurrentes. Así que utilizaremos el dibujo dinámico para generar datos del perímetro del triángulo de concurrencia, interesándonos en las posiciones de P que arrojan un perímetro cercano a 0.[5]

**Figura 2.** Triángulo de concurrencia lleno



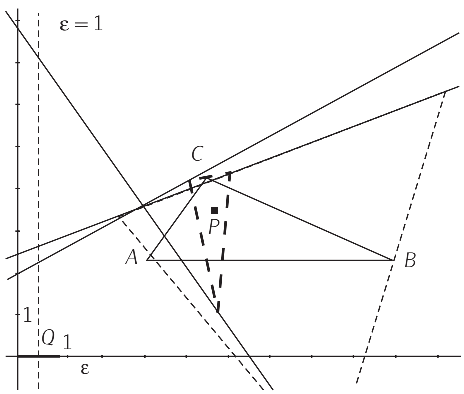

Ahora enfrentamos la segunda dificultad: conservar una memoria de las posiciones de P que dan una solución aceptable. Cabri nos ofrece dos herramientas para visualizar la trayectoria de un punto: el *lugar geométrico* y la *traza*. El *lugar geométrico* describe la trayectoria de un punto dependiendo del desplazamiento de un segundo punto sobre un objeto determinado; en este caso, como P no depende de ningún punto ni se mueve sobre un objeto determinado, el *lugar geométrico* no puede utilizarse. La *traza* hace que un punto determinado vaya dejando huellas en las posiciones que ocupa durante su desplazamiento, por lo que podríamos utilizarla en nuestro caso, pero tiene el inconveniente de que P dejará huella independientemente de si su posición produce un valor

[5] La obtención del valor 0 únicamente mediante el arrastre es prácticamente imposible, ya que los puntos representados en la pantalla no son todos los puntos del plano, sino sólo una muestra discreta de ellos, porque la pantalla tiene un número limitado de pixeles.

aceptable de la concurrencia o no. Así que la nueva dificultad consiste en lograr que P deje una traza únicamente cuando el valor del perímetro del triangulo de concurrencia sea cercano a 0.

Para resolver esta dificultad, podemos crear un punto condicional, es decir, un punto que existe si y sólo si el perímetro del triangulo de concurrencia es cercano a 0. En Cabri, los puntos de intersección aparecen o desaparecen dependiendo de la condición de que los objetos se corten o no y permiten crear así puntos condicionales. Creamos primero una expresión numérica que represente el grado de precisión aceptable de la cercanía a 0 (objeto modificable a voluntad) que llamaremos **ε**. Luego mostramos los ejes de coordenadas y transferimos esa medida sobre el eje de las abscisas, y construimos un segmento de 0 a **ε**. Asimismo, transferimos el perímetro del triángulo de concurrencia sobre el eje de las abscisas y trazamos una recta perpendicular a dicho eje por ese punto (recta punteada en la imagen). El punto de intersección de esta recta con el segmento [0, **ε**] existe si y sólo si el perímetro del triángulo de concurrencia es menor o igual a **ε**. Llamemos Q a ese punto de intersección.

**Figura 3**



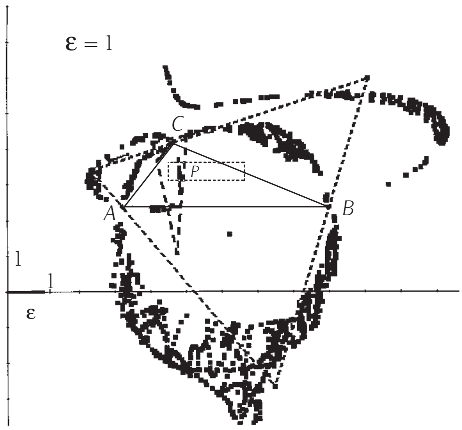

La dificultad ahora es transferir ese punto sobre P de manera que deje una huella para las posiciones de P que tengan una medida aceptable de la concurrencia. Si construimos el punto R simétrico de P con respecto a Q y luego el simétrico de R con respecto a Q, obtenemos un punto S que está en la misma posición de P y que responde a la misma condición que Q.[6] Así que, aplicando la traza al

[6] Este procedimiento se conoce con el nombre de macro PingPong. Véase Abracadabri http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/).

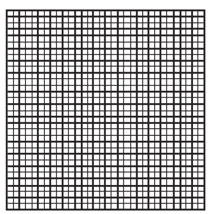
punto S, si desplazamos el punto P obtendremos una traza de su posición cada vez que el perímetro del triángulo de concurrencia es menor o igual a $\varepsilon$ (y este $\varepsilon$ podemos modificarlo a voluntad).

En la figura 4 puede verse la traza que ha dejado el punto P al moverlo por toda la pantalla, para $\varepsilon = 1$.

**Figura 4**




Esta técnica de detección de puntos que cumplen aproximadamente una condición dada puede mejorarse si hacemos que P se mueva sobre un objeto bidimensional, de manera que podamos construir el lugar geométrico de S con respecto a P. Para obtener ese objeto bidimensional, se construye un polígono cruzado sobre la base de un cuadrado cuyos lados se dividen en 50 partes iguales,[7] obteniendo una cuadrícula de la región del plano que ocupa dicho cuadrado, y P puede redefinirse como punto sobre el polígono.

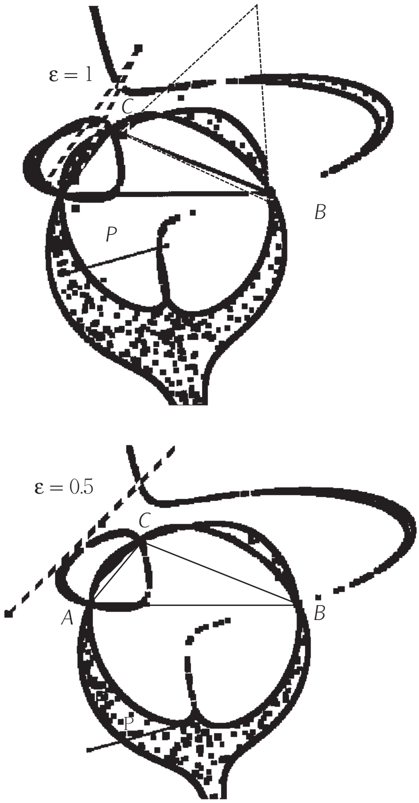


[7] Se construye un cuadrado utilizando un segmento como lado, se divide cada lado del cuadrado en 50 partes iguales y, con la herramienta "Polígono", se seleccionan uno a uno los puntos de manera que el interior del cuadrado quede cuadriculado.

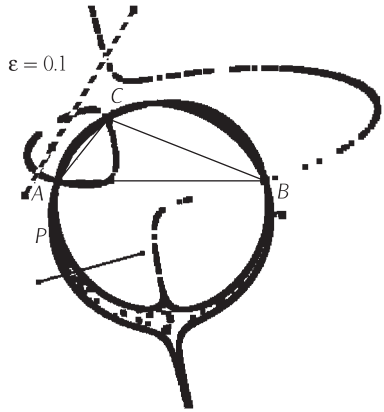
Una vez redefinido, puede ocultarse el polígono y de todas maneras podemos arrastrarlo a partir del segmento que sirvió de base a la construcción del cuadrado. Al solicitar a Cabri el lugar geométrico de S con respecto a P, se obtiene una región del polígono y podemos activar la traza de ese lugar geométrico de manera que, cuando arrastramos el segmento de base por la pantalla, obtenemos una imagen del lugar geométrico solución.[8]

## Primera conjetura: el circuncírculo

Figura 5

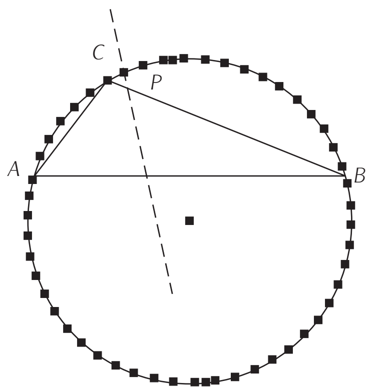



[8] Para una mejor representación, es necesario deseleccionar la opción "Unir puntos" del lugar geométrico, para obtener únicamente los puntos calculados y no los segmentos que los unen. De esta manera obtenemos en la pantalla dos curvas límite que encierran una nube de puntos.




En esta serie de imágenes, donde se hizo una reducción gradual de **ε**, puede identificarse el circuncírculo como parte del lugar geométrico solución. Esta conjetura puede verificarse fácilmente construyendo el circuncírculo y redefiniendo P como punto sobre él.

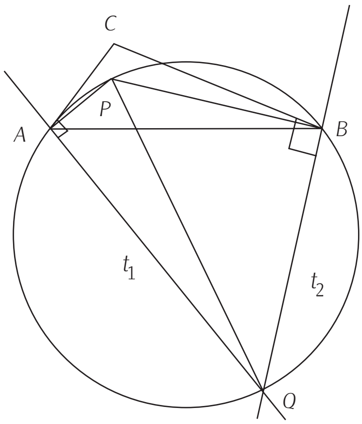
**Figura 6.** Perímetro del triángulo de concurrencia = 0.00 cm




De esta manera podemos constatar que el triángulo antipedal de un punto del circuncírculo se reduce al punto antípoda (diametralmente opuesto) y, por lo tanto, es perspectivo con el triángulo simétrico-lateral. Esta observación nos da la clave para construir una demostración, pues basta con mostrar que el triangulo antipedal de todo punto del circuncírculo se reduce al punto antípoda.

*Demostración*

Por definición, los lados del triángulo antipedal de P con respecto al triángulo ABC deben ser perpendiculares a las cevianas AP, BP y CP. Sea $t_1$ la perpendicular a PA por A y $t_2$ la perpendicular a PB por B, y Q el punto de corte de $t_1$ y $t_2$; como el triángulo PAQ es rectángulo en A, está inscrito en el círculo de diámetro PQ, al igual que el triángulo PBQ; por lo tanto, el punto Q es el antípoda de P en el círculo APB.




Ahora bien, si P está en el circuncírculo, los circuncírculos de los triángulos APB, BPC y APC son iguales y, por lo tanto, los tres antípodas coinciden.

Como el triángulo antipedal se reduce a un punto, necesariamente las rectas que lo unen a los vértices del simétrico-lateral son concurrentes.

## Segunda conjetura: una cúbica circunscrita

La forma de la otra parte del lugar geométrico solución aparentemente es una cúbica circunscrita al triángulo de referencia.[9] Para verificar esta conjetura necesitamos construir la cúbica como lugar geométrico y redefinir P como punto sobre ella. Si al hacer esta redefinición obtenemos un triángulo de concurrencia de perímetro 0, habremos verificado experimentalmente la conjetura. Si por el con-

[9] Para poder emitir esta conjetura, es necesario estar familiarizado con las distintas formas de las cúbicas. El lector puede convenir que podríamos aproximar esa forma trazando una recta y una elipse, con lo cual se muestra la plausibilidad de la conjetura.

trario obtenemos un triángulo de concurrencia de perímetro diferente de 0, tendremos un contraejemplo que demostrará la falsedad de la conjetura. Para construir una cúbica cualquiera se necesitan nueve puntos de ésta.[10]

### *Problema de la construcción del lugar geométrico: técnica de los puntos nodales*

Nuestro problema en este momento es encontrar nueve puntos que pertenezcan a la cúbica de la conjetura, a fin de utilizarlos para construirla. Una variación de la técnica de detección de puntos se mostrará eficaz en este caso. Se trata de considerar las curvas de nivel definidas por distintos **ε** de aproximación. Concretamente, consideremos tres intervalos disjuntos para **ε**: (0.1), (3.4) y (6.7). Cada uno de esos intervalos en el eje x produce un punto de intersección con la recta perpendicular por el punto que representa el perímetro del triángulo de concurrencia, y cada uno de esos puntos de intersección produce puntos condicionales sobre P con sus respectivos lugares geométricos (de distintos grosores en la figura 8).

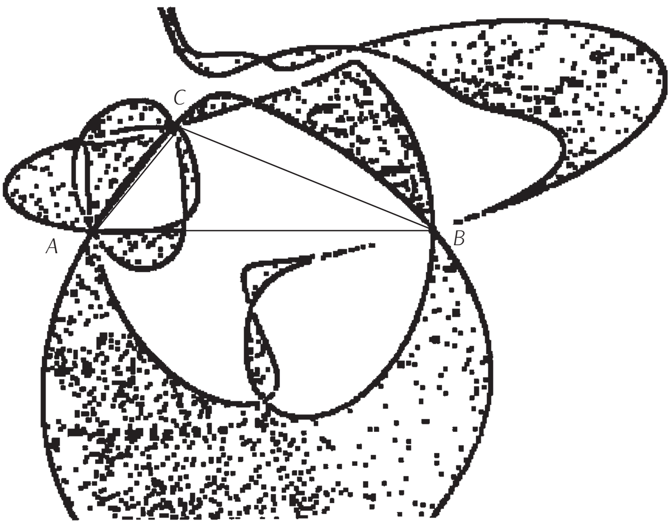
Figura 8.


[10] R. Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri géomètre II,* tomo 2, Brochure APMEP núm. 125.

Algo que sorprende al observar la figura 8 es constatar que existen puntos comunes a las tres zonas de solución, lo cual debería ser imposible, puesto que los intervalos son disjuntos. Surge la pregunta de cómo es posible que una posición de P produzca un triángulo de concurrencia cuyo perímetro esté *a la vez* entre 0 y 1, entre 3 y 4, entre 6 y 7. Acercando P a cada uno de los puntos nodales de estas curvas de nivel, podemos observar que aparentemente en esas posiciones de P, los triángulos simétrico-lateral y antipedal tienen un vértice común, con lo cual desaparece una de las rectas que definen el triángulo de concurrencia. En realidad esos puntos nodales son puntos de discontinuidad de las curvas, puesto que el perímetro del triángulo de concurrencia es indefinido cuando P ocupa la posición de cualquiera de esos puntos. Sin embargo, todas las curvas de nivel pasan por esos puntos de discontinuidad y, por lo tanto, también la cúbica solución, para la cual también $\varepsilon = 0$, con lo cual podríamos utilizar esos puntos para construir la cúbica.

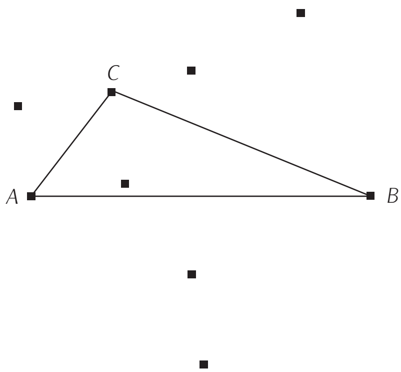
Nuestro problema ahora es determinar de manera exacta los puntos nodales de esas curvas de nivel. Para lo cual vamos a tomar $\varepsilon$ en el intervalo (–5; 5).

**Figura 9**



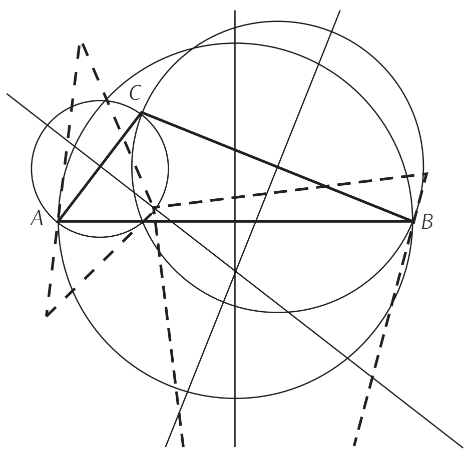

Para estudiar la posición de los puntos nodales, colocamos puntos aproximadamente en los cortes de la curva y luego eliminamos la traza y los triángulos auxiliares.

Figura 10




Con ayuda de esta imagen podemos hacer varias conjeturas: primero, los puntos nodales parecen ser simétricos con respecto a los lados del triángulo de referencia. Además, parecen estar sobre la mediatriz de cada lado. Por último, parecen estar sobre el círculo con diámetro el lado del triángulo. Con estas tres conjeturas es posible hacer la construcción para verificarlas. Así que trazamos las mediatrices de ABC y los círculos diámetro de cada lado, construimos los puntos de intersección de cada mediatriz con su círculo correspondiente y luego redefinimos P sobre cada uno de los seis puntos obtenidos.

Figura 11



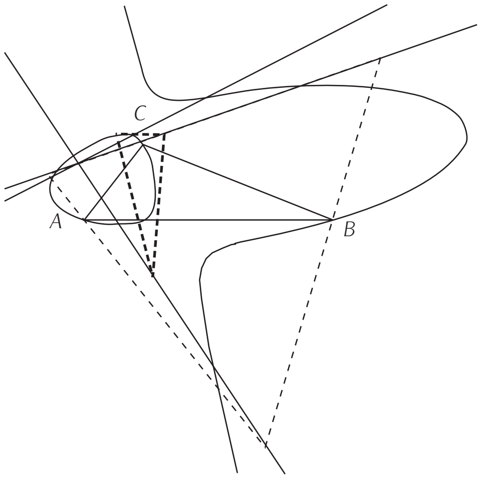

Observamos que, efectivamente, en cada uno de esos puntos el perímetro del triángulo de concurrencia es inexistente, pues dos vértices correspondientes de los triángulos simétrico-lateral y antipedal de P están confundidos.

### *Demostración*

Sea P uno de los puntos de intersección de la mediatriz de AB con el círculo de diámetro AB. Uno de los vértices del simétrico-lateral de P es el simétrico de P con respecto a AB. Ahora bien, como lo vimos anteriormente, el vértice del antipedal correspondiente a AB es el antípoda de P con respecto al círculo APB, que es exactamente el simétrico de P con respecto a AB.

Así que ya tenemos 9 puntos por los cuales pasa la cúbica circunscrita solución del problema: los tres vértices y los 6 otros puntos nodales. Sólo nos queda trazar la cúbica por esos 9 puntos y redefinir P sobre ella:

**Figura 12.** Perímetro del triángulo de concurrencia = 0.00 cm




De esta manera, podemos verificar que los puntos P de esta cúbica producen triángulos simétrico-lateral y antipedal perspectivos. La demostración sintética de este resultado es particularmente compleja y requiere la revisión de toda la teoría sobre las cúbicas. Sin embargo, existe una demostración analítica, utilizando las coordenadas baricéntricas, en el sitio de Internet “Cubics in the triangle plane” de Bernard Gibert.[11] Allí también está clasificada esta cúbica con el nombre de ortocúbica.

[11] http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/index.html. Página consultada en abril de 2005.

### Técnicas de geometría dinámica experimental (detección de puntos, puntos nodales, verificación por reconstrucción)

La primera técnica descrita es la de detección de puntos que cumplen una cierta condición. Esta técnica responde a la tarea de construir un cierto número de puntos que permitan describir la forma del lugar geométrico buscado, que a su vez puede considerarse como una subtarea de la técnica general del análisis: considerar el problema resuelto y encontrar propiedades que se deducen de él y permiten hacer su construcción.

Esta técnica de detección de puntos puede considerarse como un perfeccionamiento de la técnica general del ajuste por desplazamiento, que es característica de la geometría dinámica. A diferencia de los dibujos estáticos (en papel), los dibujos dinámicos (en la pantalla de la computadora) pueden modificarse de manera continua mediante el arrastre de los objetos que los componen, y mantienen las propiedades que les fueron asignadas por construcción. En el ejemplo mostramos cómo era posible desplazar el punto P hasta obtener visualmente la concurrencia de las rectas. Este desplazamiento continuo sirve de base a un tipo de razonamiento matemático que no es de uso corriente en geometría, donde estamos acostumbrados a la dicotomía verdadero/falso. Por el contrario, el cálculo, que se preocupa por la continuidad y discontinuidad de las funciones, ha desarrollado las herramientas teóricas que permiten tratar ese tipo de razonamiento: "en la vecindad de un cierto punto, los valores de la función tienden a...". En nuestro caso podríamos decir que, ante la imposibilidad de obtener la concurrencia de manera exacta, podemos considerar el hecho de que en la vecindad de ciertos puntos la concurrencia tiende a cumplirse. La técnica de detección de puntos permite controlar el grado de precisión de la concurrencia, que ya no se considera como una condición verdadera o falsa, sino como una condición límite. Esta característica, unida al hecho de que el software calcula la posición de muchos puntos que cumplen ese grado de precisión, hace de la técnica de detección de puntos una herramienta poderosa para determinar la forma de los lugares geométricos buscados.

La segunda técnica descrita es la de los puntos nodales o puntos de discontinuidad de la condición límite. Esta técnica es una derivación y un complemento de la técnica de detección de puntos. En efecto, una vez cuantificada la condición de concurrencia, de manera que la podemos considerar como una condición límite a la que nos acercamos de manera continua, la existencia de puntos nodales revela la discontinuidad de esa condición. Al tomar distintos grados de aproximación de la concurrencia, cada uno de ellos da lugar a una curva solución; si consideramos la familia de estas curvas, los puntos nodales son los puntos comunes a todas esas curvas y, por lo tanto, también pertenecen a la curva de $\varepsilon = 0$. La técnica de los puntos nodales utiliza la imagen en la pantalla de dos de esas curvas para determinar de manera exacta dichos puntos, los que, a su vez, se utilizan para la construcción del lugar geométrico buscado.

### *Sobre la validación experimental: la técnica de validación por reconstrucción*

El carácter experimental de este trabajo se reconoce en el recurso a la experiencia para producir y validar conjeturas, recurso que generalmente se considera inconveniente si no ilegítimo en geometría. En efecto, el gran esfuerzo de axiomatización que caracteriza a la historia de la geometría es una manera de liberarse de las contingencias de la percepción, la cual puede revelarse dudosa e inducir a error. La geometría dinámica permite retomar la percepción en el trabajo de investigación, asegurando un control teórico de ésta mediante el arrastre. En este sentido, la geometría experimental se diferencia claramente de la geometría formal (axiomático-deductiva) sin estar en oposición con ella.

La posibilidad de deformar de manera continua una figura que mantiene durante el desplazamiento las propiedades que se le impusieron por construcción hace de la geometría dinámica un laboratorio de producción de contraejemplos para toda conjetura que enuncia una implicación simple entre dos propiedades. Supongamos que se tiene una figura con dos propiedades $P1$ y $P2$, de las cuales conjeturamos la implicación "$P1$ entonces $P2$". Si logramos mostrar un caso de figura en el que esté presente $P1$ y no se cumpla $P2$, constituye un contraejemplo que demuestra (formalmente) la falsedad de la implicación ($P1 \wedge \neg\, P2 \Rightarrow \neg\, (P1 \Rightarrow P2)$). Así que, si construimos una figura a la que imponemos (por construcción) la propiedad $P1$ y al deformarla por el arrastre obtenemos un caso en el que la propiedad $P2$ no se cumple, esa invalidación experimental es equivalente a una demostración formal.

Ahora bien, ¿qué sucede si no logramos invalidar una conjetura por el arrastre? ¿La acumulación de casos positivos de la implicación constituye una demostración de su validez? Naturalmente, la respuesta es no. Sin embargo, podemos decir que el fracaso de una invalidación experimental es una validación provisional de la conjetura hasta que se encuentre un contraejemplo o hasta que se construya una demostración formal.[12] En ausencia de una demostración formal, la no invalidación constituye una validación experimental que no excluye la posibilidad de que se encuentren contraejemplos.

La técnica de validación experimental puede resumirse así: si se tiene la conjetura de que *P*1 implica *P*2, se construye *P*1 y se aplica el arrastre para buscar posibles casos donde no se cumpla *P*2; si no se encuentran contraejemplos, se considera validada la conjetura provisionalmente hasta que se encuentre un contraejemplo o hasta que se construya una demostración formal.

La exploración de una figura dinámica en la que *P*1 y *P*2 son invariantes puede, además, conducir a descubrir otras propiedades de la figura que pueden constituir eslabones lógicos de la demostración de *P*1 entonces *P*2. Así fue como, en el ejemplo, la construcción de P sobre el circuncírculo no sólo constituyó una validación experimental de la conjetura según la cual el circuncírculo forma parte del lugar geométrico buscado, sino que mostró que todo punto del circuncírculo tiene un triángulo antipedal reducido a su punto antípoda, propiedad que sirvió para la demostración de la conjetura.

## CONCLUSIÓN

La geometría dinámica utiliza el principio de continuidad que sirvió de base a los desarrollos de la geometría proyectiva, pero que no ha sido objeto de un tratamiento formal en geometría. La formalización del concepto de continuidad fue resultado del estudio de las funciones, campo considerado hoy como distinto a la geometría: el cálculo. Esta operacionalización de la continuidad en geometría constituye un campo de problemas nuevo en las matemáticas, y las implicaciones de su utilización aún no se conocen. Hasta ahora, la comunidad matemática no ha mostrado interés en esta nueva problemática y se ha limitado a criticar toda práctica experimental como ilegítima y no rigurosa. Por su parte, la comunidad de profesores de matemáticas acepta el valor didáctico de la geometría dinámica, pero no tiene las herramientas teóricas suficientes para sustentar el trabajo matemático con estos nuevos objetos ostensivos. La didáctica de las matemáticas, que postula la dialéctica entre lo didáctico y lo matemático, requiere profundizar la investigación sobre las implicaciones de esa operacionalización de la continuidad en geometría, tanto en la actividad matemática, como en su enseñanza.

[12] Esta afirmación se basa en la teoría de la falsación de Karl Popper.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Borwein, J. *et al.*, "Experimental Mathematics: A Discussion", http://www. cecm. sfu.ca/organics/vault/expmath/expmath/html/expmath.html, página web consultada en abril de 2005.

Bosch, M. y Y. Chevallard (1999), "La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 19, núm. 1, pp. 77-124.

Chevallard, Y. (1998), "Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique", en R. Noirfalise (ed.), *Actes de l'université d'été de La Rochelle,* Clermont-Ferrand, IREM, pp. 89-120.

Cuppens, R., *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri géomètre II,* tomo 2, Brochure APMEP, núm. 125.

Laborde, C. (1995), "Designing Tasks for Learning Geometry in a Computer Based Environment", en L. Burton y B. Jaworski (eds.), *Technology in Mathematics Teaching –A Bridge Between Teaching and Learning,* Londres, Chartwell-Bratt, pp. 35-68.

Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 14, núm. 12, pp. 165-210.

Ruthven, K. *et al.* (2004), "Incorporating Geometry Systems into Secondary Mathematics Education: Didactical Perspectives and Practices of Teachers", Ponencia presentada en la conferencia anual de la British Educational Research Association, Manchester, septiembre.


## DATOS DEL AUTOR


Martín Eduardo Acosta Gempeler
Universidad Joseph Fourier, Francia
martin.acosta@imag.fr

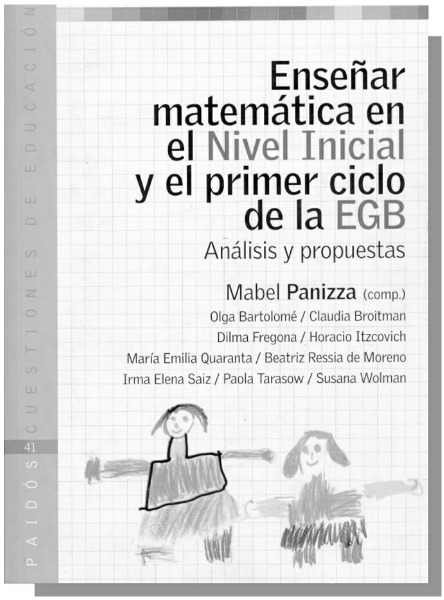
# *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la* EGB*. Análisis y propuestas*, de Mabel Panizza (comp.)

Reseñado por Rocío Guzmán

El libro se compone de ocho textos sobre la adquisición de conceptos numéricos, espaciales y geométricos, en el nivel inicial. Está dirigido a una amplia gama de lectores: maestros de grupo, asesores, investigadores y diseñadores de currículos, entre otros, con la intención de facilitar la comunicación entre investigadores y profesores, comunidades que a menudo se encuentran distanciadas.

Una constante que aparece en los distintos trabajos presentados es la preocupación por abordar el problema de la construcción del *sentido* de los conocimientos por los alumnos. De hecho, éste es el tema del texto con el que inicia el libro, "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática" de Mabel Panizza. La autora aborda la cuestión a través de las relaciones entre los objetos de conocimiento y sus representaciones. Sobre estas relaciones destaca dos condiciones deseables desde el punto vista de los niños:

a) no confundir las representaciones con los conceptos, y




b) reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones.

La autora señala que, desde muy pequeños, los alumnos pueden reconocer objetos matemáticos en algunas de las representaciones que utilizan: la aceptación por parte de los niños de que 2 + 8 y 8 + 2 son dos formas diferentes de encontrar el mismo resultado, pone en evidencia que el niño reconoce distintas representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso, el número 10. La utilización o preferencia por alguna de ellas debe interpretarse como maneras de conocer los objetos y sus representaciones formales. Reconocerlas como tales permitirá al docente planear un trabajo didáctico intencionado que las haga evolucionar. Panizza destaca tres aspectos para abordar el problema del sentido: *1)* la existencia de diferentes maneras de conocer por parte de los alumnos; *2)* la identificación de éstas a través de las representaciones que utilizan, y *3)* el reconocimiento del uso de producciones y representaciones no convencionales.

La autora también aborda cuestiones tales como: las diferentes funciones que tienen las representaciones para los alumnos; los conocimientos que se requieren para resolver los problemas, y las dificultades para interpretar diferentes sistemas de representación que se utilizan en la enseñanza de los objetos matemáticos.

En un segundo texto de este libro, esta misma autora expone una síntesis de algunos conceptos centrales de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, debido a la influencia que dicha teoría tiene en los diferentes trabajos que se presentan en esta obra. Aborda, entre otros, los conceptos de *situación didáctica, situación adidáctica,* tipos de situación didáctica: de *acción,* de *formulación,* de *validación,* la *devolución* y la *institucionalización*. Como la propia autora aclara, la lectura de este capítulo significa un primer acercamiento a la obra, vasta y compleja, de Guy Brousseau.

En el capítulo "La enseñanza del número y del sistema de numeración en el nivel inicial y el primer año de la EGB", Beatriz Ressia de Moreno presenta, en un primer momento, un análisis de distintos enfoques de enseñanza de la matemática, el de la enseñanza clásica, el de la "matemática moderna" y los derivados de las investigaciones contemporáneas en didáctica de la matemática. Posteriormente da cuenta de algunos aportes de diferentes investigadores acerca de los conocimientos de los niños sobre la serie oral, el conteo y la numeración escrita. Por último, presenta una serie de actividades didácticas para la enseñanza del número.

En el capítulo 4, "El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales", Olga Bartolomé y Dilma Fregona abordan la problemática de la enseñanza del número natural desde la teoría de las situaciones didácticas. Para empezar, mencionan algunos referentes teóricos que permitirían a los docentes reflexionar y analizar las actividades que diseñan o implementan en su grupo. Más adelante, presentan situaciones de distribución, basadas en la situación fundamental de número de G. Brousseau, que consisten en anticipar la cantidad de objetos necesarios para distribuir uno, o más de uno, a cada uno de los destinatarios.

En el capítulo "Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas", María Emilia Quaranta, Paola Tarasow y Susana Wolman, retomando las investigaciones de Delia Lerner, ponen de relieve nuevos resultados relativos al conocimiento del sistema de numeración, específicamente de la serie numérica escrita, puestos en evidencia por los alumnos que participaron en un proyecto de enseñanza en el que el principio de la intervención didáctica era producir e interpretar escrituras numéricas. La recurrencia a los números nudos, a la relación del nombre de la cifra con la escritura o a la relación de escritura igual cuando se trata de la misma decena son algunos de los conocimientos que los niños ponen en juego para la construcción de las regularidades del sistema de numeración.

María Emilia Quaranta y Susana Wolman, en su texto titulado "Discusiones en las clases de matemáticas: qué, para qué y cómo se discute", parten de reconocer la confusión que existe hasta la fecha en relación con el concepto de "puesta en común". Desde la didáctica de la matemática, las autoras argumentan teóricamente la importancia de los *momentos de discusión*. Señalan que los espacios de debate deben ser planeados de manera intencional por el profesor y que constituyen "un potente incentivo de progreso en el aprendizaje". La dificultad para definir un modo general de organizar estos espacios lleva a las autoras a exponer fragmentos de registros de clases del primer ciclo de la EGB, en los que se pueden observar algunas cuestiones didácticas presentes en las confrontaciones. El análisis posterior que realizan al término del desarrollo de cada actividad es enriquecedor, ya que destaca intervenciones del docente dignas de ser consideradas por un maestro con interés en gestionar puestas en común en su salón de clase.

En el capítulo 7, Irma Saiz aborda el problema de la adquisición de conocimientos espaciales por el niño en su documento "La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y primer ciclo de la EGB". La autora presenta los resultados obtenidos en el desarrollo de algunas secuencias didácticas. Previo a ello, Saiz expone algunos conceptos de teorías psicológicas representativas que sustentan dicha adquisición, así como cuestionamientos actuales a estas teorías desde los avances actuales en este terreno. Asimismo, cuestiona la reducción que hace la enseñanza de este objeto de conocimiento a la presentación de un lenguaje espacial, determinado, además, por el maestro y no por situaciones que podrían exigir tal conocimiento al alumno. Los objetivos de las secuencias que se presentan son *organizar un proceso de elaboración colectiva de conceptualizaciones respecto de la organización del espacio (La granja) y de orientación de los objetos (El tobogán)*. La presentación del desarrollo exhaustivo y meticuloso de las secuencias puede constituir un aporte didáctico de gran valor para los docentes.

Por último, en el capítulo 8, "Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza", Claudia Broitman y Horacio Itzcovich abordan el tema de la enseñanza de la geometría. Los autores inician con un breve esbozo del origen del conocimiento geométrico y la manera como éste se desprende de los espacios físicos para convertirse en una rama de la matemática. Posteriormente, distinguen distintos tipos de problemas: los que se resuelven con conocimientos espaciales cuya adquisición es espontánea, problemas de producción e interpretación de representaciones planas y problemas "espacio-geométricos", entre otros. El propósito de tal categorización es destacar la necesidad de constituir en objetos de estudio para el primer ciclo aquellos conocimientos espaciales cuya adquisición no es espontánea. El desarrollo anterior permite a los autores asumir una postura en relación con lo que, desde su punto de vista, deben ser los dos grandes objetivos de la enseñanza de la geometría en la EGB, a saber: *La construcción de conocimientos cada vez más próximos a "porciones" de saber geométrico elaborados a lo largo de la historia de la humanidad. En segundo lugar, y tal vez el más importante, el inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico.*

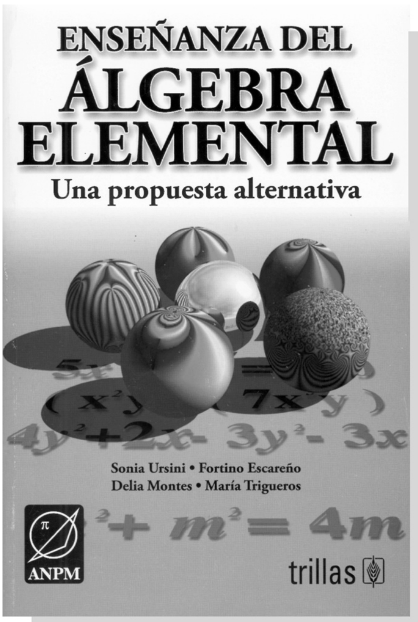
## DATOS DEL LIBRO

**Mabel Panizza (comp.) (2003)**
*Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB.*
*Análisis y propuestas*
Buenos Aires, Paidós, 326 p.

# *Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo,* de Sonia Ursini, Fortino Escareño, Delia Montes y María Trigueros

**Reseñado por María Dolores Lozano**

El aprendizaje del álgebra es un proceso complejo que se ha examinado desde diversos ángulos en un gran número de trabajos de investigación. Se han descrito las dificultades de los alumnos con el álgebra de manera extensa y, entre ellas, se han identificado como cruciales las que tienen que ver con el concepto de variable. Por otra parte, existe un gran número de libros de texto que proponen la introducción al álgebra desde distintos ángulos. La propuesta de *Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo* hace referencia a los resultados de las investigaciones en esta área, pero también plantea, basándose en ellos, una metodología de trabajo práctica que puede ser de gran utilidad en las aulas.




Esta obra logra establecer un vínculo entre la parte teórica, relacionada con la investigación, y la parte práctica, que tiene que ver con las actividades que se realizan cotidianamente dentro del salón de clases. Esta relación entre teoría y práctica hacen de este libro un recurso invaluable para el profesor, que difícilmente cuenta con recursos que incluyan tanto una cimentación teórica sólida como un gran número de aplicaciones prácticas directas. El acercamiento didáctico también está claramente fundamentado en ideas sobre el aprendizaje que se mencionan de manera explícita y que enriquecen pedagógicamente la propuesta.

Además, en *Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo*, se cuenta con numerosos ejemplos de respuestas típicas obtenidas a partir de observaciones de clase y entrevistas con los alumnos. Tanto el Modelo 3UV planteado en el libro, que toma en consideración las múltiples formas de uso de la variable en el álgebra elemental, como los ejemplos prácticos propuestos se formulan a partir del análisis cuidadoso de información empírica, lo cual enriquece la propuesta y le brinda coherencia y solidez.

El acercamiento didáctico se formula de manera concreta y detallada, con gran número de ejercicios diseñados para ayudar al profesor con sus tareas en el aula. Sin embargo, a lo largo del texto se deja en claro que la propuesta no es absoluta ni definitiva y se invita reiteradamente a que el profesor experimente con sus propias actividades. Si bien el fundamento teórico de la propuesta didáctica es sumamente sólido, la aplicación también es flexible y puede adaptarse a distintos escenarios educativos. A través de la observación de sus alumnos y mediante la reflexión acerca de las actividades matemáticas de éstos, el profesor puede utilizar el modelo propuesto en el libro para desarrollar sus propias estrategias. *Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo* es, en este sentido, una guía fundamental a partir de la cual el profesor de álgebra puede desarrollar su propio conocimiento acerca del aprendizaje del álgebra.

## DATOS DEL LIBRO

**Sonia Ursini, Fortino Escareño, Delia Montes y María Trigueros (2005)**
*Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo*
México, Trillas, 165 p.

# Árbitros 2005

| Nombre | Apellido(s) | Institución | País |
|---|---|---|---|
| Luis Manuel | Aguayo | Escuela Normal Manuel Ávila Camacho | México |
| Silvia | Alatorre | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| Caroline | Bardini | Université Laurentienne | Canadá |
| Arturo | Bazán | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| Alberto | Camacho | Instituto Tecnológico de Chihuaha | México |
| Rodrigo | Cambray | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| Guadalupe | Carmona | Universidad de Texas en Austin | Estados Unidos de América |
| Alicia | Carvajal | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| José | Contreras | Universidad de Huelva | España |
| José Luis | Cortina | Peabody College, Universidad de Vanderbilt | Estados Unidos de América |
| Hugo | Espinosa | Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav | México |
| Catalina | Ferat | Universidad Nacional Autónoma de México | México |
| Vicent | Font | Universidad de Barcelona | España |
| Dilma | Fregona | Universidad Nacional de Córdoba | Argentina |

| Nombre | Apellido(s) | Institución | País |
|---|---|---|---|
| Irma | Fuenlabrada | Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav | México |
| Josep | Gascón | Universidad Autónoma de Barcelona | España |
| Gerardo | Hernández | Departamento de Metodología y Teoría de la Ciencia, Cinvestav | México |
| Verónica | Hoyos | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| Glinda | Irazoque | Universidad Nacional Autónoma de México | México |
| Gelsa | Knijnik | Universidad do Vale dos Sinos | Brasil |
| Víctor | Larios | Universidad Autónoma de Querétaro | México |
| Dolores | Lozano | Instituo Latinoamericano de Comunicación Educativa | México |
| Dione | Luchessi de Carvalho | Universidad Estatal de Campinas | Brasil |
| Germán | Mariño | Dimensión Educativa | Colombia |
| Asuman | Oktac | Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav | México |
| Luis | Radford | Université Laurentienne | Canadá |
| Araceli | Reyes | Instituto Tecnológico Autónomo de México | México |
| Pedro Gerardo | Rodríguez | Centro de Estudios Educativos | México |
| Guadalupe | Saborío | Benemérita Escuela Nacional de Maestros | México |
| Irma | Sáiz | Universidad de Corrientes | Argentina |
| Mariana | Sáiz | Universidad Pedagógica Nacional | México |
| Vicente | Sánchez | Benemérita Escuela Nacional de Maestros | México |

| Nombre | Apellido(s) | Institución | País |
|---|---|---|---|
| Dora | Santos | Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav | México |
| Diana | Solares | Investigadora independiente | México |
| Mónica | Schulmaister | Secretaría de Educación Pública | México |
| Raciel | Trejo | Benemérita Escuela Nacional de Maestros | México |
| Ana María | Vázquez | Universidad Nacional Autónoma de México | México |
| Gonzalo | Zubieta | Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav | México |

# Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática.

## OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Buscar una comprensión profunda de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

## LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

## TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
    1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    1.3. Saber matemático
        1.3.1. Aritmética
        13.2. Geometría
        1.3.3. Probabilidad y estadística
        13.4. Preálgebra y álgebra
        1.3.5. Trigonometría
    1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    1.6. Uso de la tecnología
    1.7. Interacciones en el aula
    1.8. Evaluación
    1.9. Enseñanza experimental
    1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
    2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    2.3. Saber matemático
        2.3.1. Álgebra
        2.3.2. Geometría
        2.3.3. Probabilidad y estadística
        2.3.4. Cálculo
        2.3.5. Razonamiento matemático
    2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    2.6. Uso de la tecnología
    2.7. Interacción en el aula
    2.8. Evaluación
    2.9. Enseñanza experimental
3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
    3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    3.3. Saber matemático
        3.3.1. Álgebra lineal
        3.3.2. Geometría

- 3.3.3. Probabilidad y estadística
- 3.3.4. Cálculo de una o varias variables
- 3.3.5. Análisis
- 3.3.6. Ecuaciones diferenciales
- 3.3.7. Variable compleja
- 3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
- 3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
- 3.6. Uso de la tecnología
- 3.7. Interacciones en el aula
- 3.8. Diagnósticos y evaluación
- 3.9. Enseñanza experimental

4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
   - 4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
   - 4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
   - 4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
   - 5.1. Políticas
   - 5.2. Instituciones
   - 5.3. Asociaciones
   - 5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
   - 6.1. Teorías y marcos referenciales
   - 6.2. Métodos de investigación
   - 6.3. Validación
   - 6.4. Instituciones y organizaciones
   - 6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos sobre estos temas que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

## GUÍA PARA AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones en español.

- Todos los escritos que se reciben son arbitrados. El Comité Editorial se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El contenido del artículo es responsabilidad del autor.
- El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título cuando lo considere conveniente, previa consulta al autor.
- El Comité Editorial y Editorial Santillana tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual al autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* como la que se podrá encontrar en la página www.santillana.com.mx/educacionmatematica.

## PREPARACIÓN DEL ESCRITO

El escrito:

- Deberá estar preparado electrónicamente, en Microsoft Word o algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 30 cuartillas (alrededor de 10 000 palabras) incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Deberá incluir también un resumen en español de entre 100 y 150 palabras, la versión en inglés o francés del resumen, y un mínimo de 5 palabras clave.
- En archivo aparte, deberá prepararse una *carátula* que contenga: *a)* título y tema central del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse explícitamente si el material ha sido presentado previamente en congresos o publicado en otro idioma); *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, fax y domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo de texto.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean familiares a un lector internacional.

Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, pp. 51-53).

Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo:

Ávila, A. y G. Waldegg (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*, México, INEA.
Block, D. y Martha Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela", *Educación Matemática*, vol. 5, núm. 3, pp. 39-58.
Kaput, J. (1991), "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes", en Von Glaserfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education*, Dordretch, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

Si la lengua materna del autor no es el español, el artículo deberá ser revisado por un experto en redacción y ortografía españolas antes de ser enviado a la revista.

## ENVÍO DEL ESCRITO

- Los escritos deberán enviarse a alguna de las siguientes direcciones electrónicas: revedumat@yahoo.com.mx o aliavi@prodigy.net.mx
- En el remoto caso en que el autor no pueda enviar su propuesta vía correo electrónico, podrá hacerlo llegar de manera impresa acompañada de los diskettes respectivos, con las especificaciones arriba señaladas, agregando una impresión por triplicado en la que no aparezcan los datos de los autores, para facilitar el proceso de arbitraje, que es anónimo, a la siguiente dirección postal:

  Revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA
  Atención Patricia Balderas
  Apartado Postal 86-521
  México, D.F., 14391, México

## PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Esta revisión interna tarda aproximadamente un mes, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de 2 o 3 expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión tarda aproximadamente tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores con nuevo arbitraje, y rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de 3 meses.

Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx/educacion matematica

## NOTAS DE CLASE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word o con los mismos lineamientos de presentación que los artículos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

## RESEÑAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las 5 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2 000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.