Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 25 • núm. 2 • agosto de 2013

COMIE

Comité editorial

El Comité Editorial agradece profundamente a Editorial Santillana la cesión de los derechos de uso del diseño editorial de EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (Mathematics Didactics Database), Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx y aliavi@prodigy.net.mx.

Educación Matemática

COMIE

Educación Matemática *vol. 25 • núm. 2 • agosto de 2013*

Contenido

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Editora responsable: Alicia Ávila Storer
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Fabiano Durand

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102
Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: agosto de 2013

El tiro fue de 100 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico.

www.revista-educacion-matematica.com

Editorial

En este número, dos artículos avanzan en el análisis de las funciones como objeto de aprendizaje escolar, tema que ha cobrado interés en últimas fechas, según se ve en los índices de nuestra revista. En un caso, las aportaciones se hacen tomando como marco la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud y, en el otro, la de registros de representación de Raymond Duval. De ambos escritos se pueden obtener aprendizajes útiles para la investigación y para la enseñanza. Sin embargo, de los temas abordados en este número, queremos destacar otras cuestiones. Por una parte, que algunos conceptos que parecían agotados se retoman desde una perspectiva novedosa que llama a la discusión: nos referimos específicamente al tema de las fracciones y su enseñanza. En un escrito no sólo sugerente sino quizás provocador, se nos recuerda que el modelo que ganó prevalencia entre muchos investigadores e incluso en los currículos de diversos países en los últimos 20 años —el basado en los subconstructos del número racional— no ha dado los resultados esperados por quienes lo impulsaron. Estas propuestas —inspiradas en los trabajos de Kieren— inician con la equipartición y buscan que los estudiantes tengan experiencias con las fracciones no sólo como partes de enteros, sino también como medidas, razones, cocientes y operadores. Todo con el fin de lograr una comprensión amplia, madura, de los números racionales.

A partir del análisis de resultados de pruebas estandarizadas internacionales, o las nacionales aplicadas en Inglaterra y en México, se nos hacen ver los escasos resultados de aprendizaje logrados por los alumnos en ese tema. Los autores del escrito proponen, entonces, otra manera de acercarse a las fracciones más vinculada con la idea de comparación de Freudenthal o con la conmensuración de Brousseau.

Ahora bien, pareciéndonos sugerente e incluso provocador el acercamiento presentado por Cortina y sus colegas, asumimos las posturas actuales respecto de que no es sólo del enfoque con que se proponen los conceptos matemáticos de donde deriva el aprendizaje que logran los estudiantes. Teniendo un peso importante en dicho aprendizaje, también intervienen otros factores, como el maestro y las prácticas matemáticas que promueve, favorece o inhibe en el aula.

De esto último deriva la importancia de afirmaciones como las de Acosta y sus colegas que interpretan la introducción de un *software* de geometría dinámica como "la de unos objetos ostensivos nuevos en la clase (los dibujos dinámicos)" y anticipan que dicha introducción requiere, para traducirse en mejores aprendizajes por parte de los alumnos, una modificación de las tareas, técnicas y tecnologías que se trabajan normalmente en las aulas. Por tanto, dicen estos autores, no será un objetivo fácil de alcanzar, pues requiere la modificación de las praxeologías matemáticas de los profesores.

Los autores de este escrito agregan un elemento más que disminuye la probabilidad de que estas modificaciones ocurran: como no existe una comunidad de referencia que utilice los ostensivos dinámicos en su práctica matemática, los profesores no pueden intentar reconstruir esa praxeología en sus clases. Se encontrarán entonces con una pérdida de control sobre lo que sucede en la clase y, por consiguiente, intentarán limitar fuertemente el uso de los ostensivos dinámicos para mantener la seguridad con la que han de desarrollar su papel como docentes de matemáticas.

Conviene, entonces, considerar en su justa dimensión la importancia del papel de los profesores y de conocerlos en cuanto profesionales con historia, preparación y condiciones específicas para el desarrollo de su labor, cualquiera que sea el nivel escolar en que impartan sus clases. Es un reto para la comunidad de investigadores de la educación matemática entender sus concepciones y creencias, y luego, derivar formas de colaborar con ellos en sus esfuerzos por mejorar la enseñanza.

Éste es un tema también incluido en el número mediante la contribución de Block y sus colegas. Estos autores muestran cómo los profesores no necesariamente "ven" lo que nosotros –los investigadores– "vemos" en las clases de matemáticas. Mirar con un cierto sentido los acontecimientos de la clase –lo han señalado Llinares y sus colegas– es un aprendizaje que también toma su tiempo y que se antoja complejo si se relaciona con el cúmulo de conocimientos que la investigación en educación matemática ha generado en las últimas décadas. Por eso, la indagación sobre cómo hacer significativos para los docentes los resultados de la investigación, así como sobre las distancias adecuadas entre lo que los profesores hacen y lo que se les pide hacer, son temas que nuestra revista ha difundido y seguirá difundiendo.

El Comité Editorial

La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones

José Luis Cortina, Claudia Zúñiga y Jana Visnovska

Resumen: Se plantea la conjetura de que el uso de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones constituye un obstáculo didáctico. Retomando los análisis del concepto de fracción realizados por Hans Freudenthal, Patrick Thompson y Luis Saldanha, se explica por qué es razonable esperar que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales.

Palabras clave: fracciones, obstáculo didáctico, equipartición, números racionales.

Abstract: We advance the conjecture that equipartition constitutes what Brousseau's calls a *didactical obstacle* in the fraction realm. Building on Hans Freudenthal, Patrick Thompson and Luis Saldanha´s analyses of the fraction concept, we explain why it is reasonable to consider that equipartition orients pupils to develop ways of conceiving fractions that interfere with the development of a mature understanding of rational numbers.

Keywords: fractions, didactical obstacle, equipartition, rational numbers.

INTRODUCCIÓN

En la década de 1980, los números racionales se convirtieron en un tema importante para el campo de la educación matemática. Desde entonces, el interés no ha disminuido. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y otras formas de representar a los racionales continúan ocupando un lugar importante en revistas y congresos especializados.

Aunque el tema ha sido extensamente investigado, sigue habiendo gran

Fecha de recepción: 14 de noviembre de 2012; fecha de aceptación: 28 de junio de 2013.

insatisfacción respecto a los niveles de comprensión de las fracciones que los estudiantes típicamente logran y, más importante, respecto a lo que se sabe acerca de lo que se debe hacer para mejorarlos. La siguiente cita de Davis, Hunting y Pearn (1993) expresa bien el ánimo de esta insatisfacción: "La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones no sólo es muy difícil; en el esquema más amplio de las cosas, es un triste fracaso" (p. 63). Para respaldar esta afirmación, los autores se refirieron a los resultados obtenidos por Hart en un estudio realizado en Inglaterra y publicado en 1981, en el que se evaluaron los conocimientos matemáticos de un amplio número de estudiantes de entre 11 y 16 años de edad.

Al paso del tiempo, la situación no ha cambiado mucho; por ejemplo, Bills (2003) replicó parte del estudio de Hart y encontró que, 20 años después, los adolescentes británicos tenían confusiones muy similares sobre el significado de las fracciones. Resultados obtenidos en otras partes del mundo muestran un panorama análogo; por ejemplo, Hannula (2003), en un estudio que implicó la aplicación de 1 154 pruebas a estudiantes finlandeses de quinto grado, encontró que 46% de ellos no fueron capaces de sombrear correctamente $^3/_4$ de una barra dividida en ocho partes iguales. Gould, Outhred y Mitchelmore (2006) documentaron una situación análoga en una investigación con estudiantes australianos.

En el caso de los países iberoamericanos, Backhoff, Andrade, Sánchez, Peon y Bouzas (2006), utilizando una muestra representativa, identificaron que únicamente 5.3% de los estudiantes mexicanos de sexto grado tenían 67% o más de probabilidad de reconocer una fracción como $3\ ^2/_5$ como mayor que $3\ ^1/_4$ pero menor que $3\ ^1/_2$. También en México, en un estudio que implicó la aplicación de 297 cuestionarios en 13 escuelas a alumnos de sexto grado, Cortina, Cardoso y Zúñiga (2012a) encontraron que 20% de ellos aún no asociaba de manera consistente la inscripción $^1/_2$ con la noción de mitad.

La situación descrita justifica que se revisen algunos de los supuestos básicos que han guiado el diseño de actividades y estrategias de enseñanza que buscan favorecer el aprendizaje de las fracciones. Uno de estos supuestos consiste en considerar la equipartición, si no como el único, sí como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los niños.

En este artículo se explora la posibilidad de que este supuesto sea inadecuado. Para ello proponemos la siguiente conjetura: los conocimientos que desarrollan los estudiantes como consecuencia de involucrarse en actividades basadas en la partición y repartición equitativa de artículos alimentarios (por ejemplo, pasteles y galletas) y otros objetos divisibles constituyen obstáculos didácticos (Brousseau, 1997) en el proceso de lograr una *comprensión madura de las fracciones* (Thompson y Saldanha, 2003). Con base en el análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) y el conceptual de Thompson y Saldanha sobre el concepto *fracciones*, explicamos por qué la conjetura puede ser cierta.

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS

La noción de obstáculo didáctico de Brousseau (1997) forma parte de la transposición que este autor hizo de la noción de *obstáculo epistemológico* –propuesta por el filósofo francés Gastón Bachelard– al universo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Según Brousseau, los obstáculos no son producidos por la ignorancia de un saber ni por una comprensión errónea. En lugar de ello, los obstáculos implican la (adecuada) adquisición de saberes específicos; los cuales posteriormente dificultan y obstruyen la adquisición de saberes más complejos.

Para Brousseau (1997), los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden tener tres orígenes distintos, siendo uno de ellos el desarrollo cognitivo (obstáculos de origen ontogenético). Asumiendo un punto de vista piagetiano, este autor reconoce que los conocimientos que van desarrollando los niños conllevan limitaciones que, mientras no se tornan evidentes para ellos, pueden obstaculizar el desarrollo de conocimientos más complejos. La reorganización de los conocimientos desarrollados mediante la asimilación y la acomodación es necesaria para poder superar esas limitaciones.

Brousseau (1997) reconoce que hay un segundo tipo de obstáculos que tiene su origen en la propia disciplina matemática (obstáculos de origen epistemológico). Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo. Por ejemplo, en la literatura sobre fracciones, múltiples autores han considerado que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales (cf. Streefland, 1991; Post y otros, 1993; Kieren, 1993).[1]

Para los propósitos de este artículo, es importante señalar que, en términos

[1] Es importante aclarar que esta hipótesis no es del todo aceptada; en particular, Steffe y sus colaboradores (e.g., Steffe y Olive, 2010) han argumentado en contra de ella.

pedagógicos, tanto los obstáculos de origen ontogenético como los de origen epistemológico no pueden ni deben ser evitados. Frente a ambos casos, la tarea educadora consiste en ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos; esto es, si se acepta que el aprendizaje matemático es un proceso que implica reorganizar conocimientos y requiere, en ciertos momentos, conciliar ideas y nociones que parecieran ser incoherentes entre sí.

Según Brousseau (1997), hay un tercer tipo de obstáculos que tienen su origen no en el desarrollo cognitivo ni en la propia disciplina, sino en las estrategias que se utilizan en la enseñanza para procurar apoyar el aprendizaje de nociones matemáticas específicas (obstáculos de origen didáctico). Se trata de conocimientos cuya adquisición por los estudiantes puede ser relacionada con las metáforas, representaciones y otros recursos didácticos utilizados por los educadores matemáticos en su labor.

Más adelante en este artículo explicamos por qué nosotros consideramos que algunos de los conocimientos que los estudiantes desarrollan sobre las fracciones, y que dificultan el logro de una comprensión madura del concepto, podrían constituir *obstáculos didácticos*, atribuibles al uso de la equipartición como modelo principal para apoyar la adquisición inicial de nociones fraccionarias. Por lo pronto, es importante mencionar que una diferencia significativa entre los obstáculos de origen didáctico y los de origen ontogenético y epistemológico es que los primeros –a diferencia de los otros dos– sí pueden (y deben) ser evitados. Por tratarse de obstáculos que tienen como origen las estrategias de enseñanza, el reto pedagógico consiste en utilizar estrategias distintas que apoyen el aprendizaje de nociones específicas sin orientar a los estudiantes a desarrollar conocimientos que habrán de obstaculizar innecesariamente sus aprendizajes futuros.

A continuación, retomando los análisis de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), describimos tres imágenes de las fracciones que es razonable esperar que se formen los estudiantes como resultado de ser introducidos en el concepto mediante la equipartición. Explicamos por qué estas imágenes deben ser consideradas obstáculos didácticos. Ello implica que esas imágenes no sólo obstruirían el desarrollo de nociones maduras de las fracciones, sino que también podrían ser evitadas por tener su origen en la didáctica de las matemáticas y no en la propia disciplina ni necesariamente en el desarrollo cognitivo.

LA EQUIPARTICIÓN

La equipartición ha sido considerada por múltiples autores que trabajan el campo de las fracciones como el único o el más ventajoso medio de introducir a los educandos en el tema (cf. Mack, 1990; Kieren, 1993; Steffe y Olive, 2010; Pitkethly y Hunting, 1996; Confrey y Maloney, 2010).[2] Esta consideración se fundamenta en el reconocimiento de que las actividades que implican la partición, separación o doblez de objetos divisibles –tales como pasteles, chocolates y pliegos de papel– pueden resultar significativas con relativa facilidad para los niños, incluso desde edades tempranas. Además, este tipo de actividades son útiles para provocar en los estudiantes formas de razonar consistentes con nociones fraccionarias básicas, tales como el tamaño relativo de las fracciones unitarias (es decir, $^1/_4 < {}^1/_2$) y las equivalencias (o sea, $^2/_4 = {}^1/_2$).

Con base en los análisis realizados por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003), identificamos tres imágenes de las fracciones que es razonable esperar que sean adquiridas por los educandos cuando se utiliza la equipartición como el medio principal para introducir el concepto. Se trata de tres imágenes que, como lo explicamos a continuación, obstaculizarían el desarrollo de una comprensión madura de las fracciones.

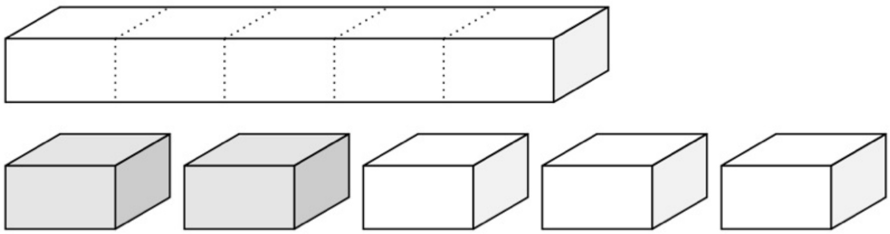
PRIMERA IMAGEN: LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE TRANSFORMAR UN OBJETO

Según Freudenthal (1983), la manera más concreta de acercarse a las fracciones en la enseñanza es la de *fracción como fracturador*. Ésta implica la matematización de situaciones que implican un entero que "ha sido o es rebanado, cortado, quebrado o coloreado en partes iguales" o que "es experimentado, imaginado, pensado como tal" (p. 140). Este autor consideró que estas situaciones que se basan en la equipartición son "de una concreción convincente y fascinante" (p. 147), pero también "mucho muy restringidas" (p. 144).

Una de las limitantes que Freudenthal reconoció en las actividades de enseñanza que se fundamentan en la equipartición es que, por lo general, el entero es representado como un objeto susceptible de ser partido fácilmente (por ejemplo, una barra de dulce, una galleta o un pastel) y la fracción unitaria como el

[2] Una excepción importante es Guy Brousseau quien, junto con Nadine Brousseau, diseñó una secuencia de situaciones didácticas en las que se introduce la noción de fracción sin aludir a equipartición (cf., Brousseau *et al.*, 2004). Esta secuencia la comentamos más adelante en este artículo.

Figura 1 La fracción $^{2}/_{5}$ representada como el resultado de partir un objeto en cinco pedazos iguales y seleccionar dos



producto de la partición (es decir, rebanadas de pastel). En estas situaciones, no sólo sería posible, sino también tentador para los educandos asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto.[3] En esta manera de imaginarse las fracciones, una fracción como $^{2}/_{5}$ implicaría la existencia de cinco pedazos (es decir, cinco pedazos de dulce) de lo que solía ser un objeto íntegro (o sea, una barra de dulce; véase la figura 1).

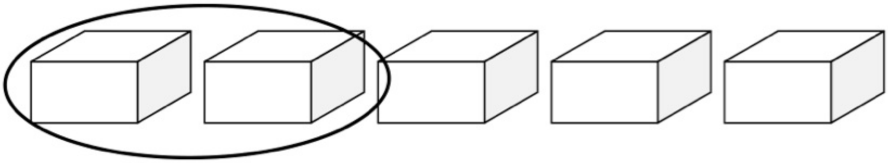
Orientar a los estudiantes a asociar las fracciones con acciones que transforman los objetos de manera irreversible podría interferir con la posibilidad de que, a la larga, comprendieran las relaciones recíprocas (es decir, que 1 es cinco veces el tamaño de $^{1}/_{5}$). También podría llevar a los educandos a que concibieran las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos. Las consecuencias de que esto suceda las revisamos a continuación.

Segunda imagen: la fracción como tantos de tantos

Clarke y Roche (2009) explican que los estudiantes "típicamente identifican el denominador como el número de partes en que se corta el entero y el numerador como el número de partes que se toman del entero" (p. 136). En esta imagen, como lo explican Gould, Outhred y Mitchelmore (2006), tanto el numerador como el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo. El denominador da cuenta del número de elementos en un con-

[3] Nótese que no existe una acción simple por la cual sea posible hacer que un pastel vuelva a su forma original después de haber sido partido.

Figura 2 La fracción $^2/_5$ representada como el resultado de crear un subconjunto de dos elementos de un conjunto de cinco pedazos



junto y el numerador del número de elementos en un subconjunto. Así, una fracción como $^2/_5$ implicaría la creación de un subconjunto de dos elementos que pertenecerían a un conjunto de cinco (véase la figura 2).

Thompson y Saldanha (2003) utilizan la frase *tantos de tantos* para describir esta manera de concebir las fracciones. Ellos señalan que es de naturaleza aditiva, no multiplicativa, ya que no conlleva la noción de tamaño relativo. Ello quiere decir que una expresión como "$^2/_5$ de una barra de dulce" no implicaría para los alumnos de manera inmediata que la cantidad de dulce equivaldría a menos de $^1/_2$ de la barra (razonando que 2 es menos que la mitad de 5). En lugar de ello, sería más probable que la expresión "$^2/_5$ de una barra de dulce" les provocase un razonamiento aditivo; por ejemplo, cuando se agrupan dos elementos de un conjunto de cinco, tres elementos quedan fuera del subgrupo.

Tercera imagen: la fracción como incluida en un entero

La última de las imágenes reconocible en los análisis realizados por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003) consistiría en concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero. Para Thompson y Saldanha (2003), esta imagen se origina en la anterior. Ellos sostienen que la imagen tantos de tantos "conlleva una sensación de inclusión –que el primer tantos debe estar incluido en el otro tantos–" (p. 105). Según estos autores, los estudiantes que conciben las fracciones de esta manera,

> no aceptarán la idea de que se puede hablar del tamaño de una cantidad como siendo una fracción de otra cuando no tengan nada físicamente en común. Ellos aceptarán "¿El número de chicos *[boys]* es qué fracción del

número de niños *[children]*?", pero se confundirán con "¿El número de chicos es qué fracción del número de chicas?" (p. 105).

Así, para Thompson y Saldanha (2003), la imagen de una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero limitaría tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta (únicamente ≤ 1).

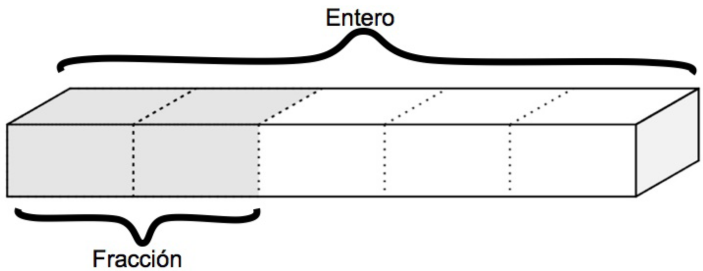
Freudenthal (1983), asumiendo un punto de vista diferente, reconoció la matematización de situaciones que implican la equipartición de objetos como una aproximación didáctica que presenta las fracciones como entes contenidos dentro de un entero. Para este autor, esta representación estaría presente incluso si las particiones se entendieran como entidades de tamaño relativo respecto al tamaño de un entero; esto es, no únicamente cuando se concibieran como elementos discretos que forman conjuntos y subconjuntos.

Freudenthal consideró que la aproximación didáctica a la fracción "como fracturador" tendría limitaciones muy importantes. Para él, esta aproximación a las fracciones sería, en términos pedagógicos, "un comienzo muy limitado" (p. 144). Explicó que, en la equipartición, "la enésima parte es vista o imaginada exclusivamente dentro del entero" (p. 147). En consecuencia, las actividades de enseñanza que se basan en la equipartición podrían ser útiles para apoyar que los estudiantes razonen sobre la acumulación de la magnitud cuantificada por una fracción unitaria (es decir, m veces ${}^{1}/_{n}$), siempre y cuando la magnitud acumulada no exceda del entero ($m \leq n$; véase la figura 3).

Freudenthal también reconoció una importante limitación matemática en las actividades que procuran la matematización de la equipartición de objetos, ya que implican "un concepto de equivalencia muy restringido" (p. 147). Explicó que la partición, como operación, produce siempre un número limitado de elementos en cada clase de equivalencia; esto es, al partir una magnitud A en n partes iguales, se producen n elementos equivalentes, no más.[4] Reconoció que este concepto de equivalencia es inconsistente con la definición de una fracción unitaria (${}^{1}/_{n}$) como el tamaño de una magnitud que es susceptible de acumulación irrestricta (${}^{m}/_{n}$, entendido como m veces ${}^{1}/_{n}$ donde m no tiene que ser menor o igual que n).

[4] Vale la pena mencionar que esta limitación también aplicaría cuando la magnitud que se va a partir equitativamente incluyera varios enteros. Por ejemplo, si la magnitud en cuestión fuera $2A$, el número de elementos equivalente que se podrían obtener al partir cada entero en n partes iguales sería $2n$, no más.

Figura 3 $^{2}/_{5}$ como una fracción contenida en un entero



Para Freudenthal, el uso de actividades que implicasen la equipartición de objetos sería inadecuado para ayudar a los estudiantes a que concibiesen las fracciones como números que pueden cuantificar cantidades mayores que uno. Según él, estas actividades de equipartición (fracción como fracturador) conducirían a "las fracciones propias únicamente" (Freudenthal, 1983, p. 147). Freudenthal consideró que, para utilizar las fracciones como fuente de los números racionales, se necesitan modelos didácticos que permitan "una equivalencia de mayor alcance, así como el acceso irrestricto a elementos en cada una de las clases de equivalencia" (Freudenthal, 1983, p. 147).

El análisis de Freudenthal sirve para especificar la limitación que la equipartición podría tener como contexto para apoyar el desarrollo de una comprensión madura de fracción en los estudiantes. Incluso si fuera posible hacer que los estudiantes superasen fácilmente las imágenes de fracción como resultado de transformar un objeto y de fracción como tantos de tantos –logrando que las entendieran como números que cuantifican magnitudes de tamaño relativo a un entero–, sería razonable esperar que las concibieran como números que necesariamente cuantifican tamaños menores o iguales que uno. Esta forma de entender las fracciones, entre otras cosas, obstruiría el hecho de que los estudiantes entendieran las fracciones como números que pueden cuantificar el tamaño de algo relativo a algo más que está separado (por ejemplo, "El número de chicos es $^{5}/_{3}$ del número de chicas").

PROPUESTAS PARA SUPERAR LAS LIMITACIONES DE LA EQUIPARTICIÓN EN LA ENSEÑANZA

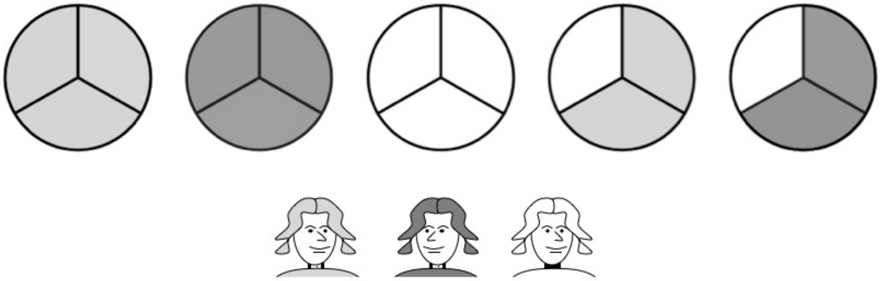
En la literatura especializada que propone el uso de la equipartición como vía para introducir el concepto de fracción, se pueden reconocer tres estrategias didácticas principales que han sido utilizadas para ayudar a los estudiantes a que le encuentren sentido a formas de utilizar las fracciones que serían inconsistentes con las imágenes descritas en el apartado anterior. En las tres estrategias, estas imágenes se tratan de manera consistente con lo que Brousseau (1997) considera obstáculos ontogenéticos y epistemológicos. En consecuencia, el reto pedagógico ha implicado encontrar modos de ayudar a los estudiantes a superarlas.

La primera de las estrategias implica el uso de situaciones en las que se reparten equitativamente múltiples enteros (Streefland, 1991; Confrey y Maloney, 2010). En estas situaciones, típicamente se pide a los educandos que averigüen la ración equitativa que cada una de varias personas recibiría al repartir cierto número de objetos divisibles (por ejemplo, pastelillos). Con el uso de ese tipo de situaciones, se espera brindar a los educandos contextos en los que puedan explorar la equivalencia entre fracciones y, sobre todo, darles sentido a las fracciones impropias. Por ejemplo, la equivalencia entre $^{2}/_{3}$ y $^{4}/_{6}$ se podría determinar estableciendo que la ración que un individuo recibiría al repartir dos pastelillos entre tres personas sería la misma que al repartir cuatro pastelillos entre seis personas) si la repartición se hiciera dando a cada individuo una fracción equitativa de cada pastelillo. Una situación que implicara repartir cinco pastelillos entre tres personas serviría para ayudar a los educandos a reconocer la manera en que se podría generar una fracción como $^{5}/_{3}$ y cómo ésta es equivalente a $1\ ^{2}/_{3}$ (véase la figura 4).

Entre las críticas más fuertes que se le han hecho a esta estrategia está la de Tzur (2007), quien reconoce en el uso de estas situaciones una problemática didáctica importante, sobre todo en las etapas iniciales de enseñanza. Tomando como base el éxito limitado reportado por Streefland (1991) en su experimento de enseñanza, Tzur propone que estas actividades podrían requerir el desarrollo previo, por parte de los estudiantes, de las nociones cuyo aprendizaje se espera apoyar.

Esto es, Tzur considera que, para poder encontrarle sentido a estas situaciones, los estudiantes ya tendrían que concebir la fracción unitaria como un número que expresa el tamaño de un atributo susceptible de ser acumulado y que puede ser iterado incluso más allá del tamaño del entero. Así, para este

Figura 4 La repartición equitativa de cinco pastelillos entre tres personas



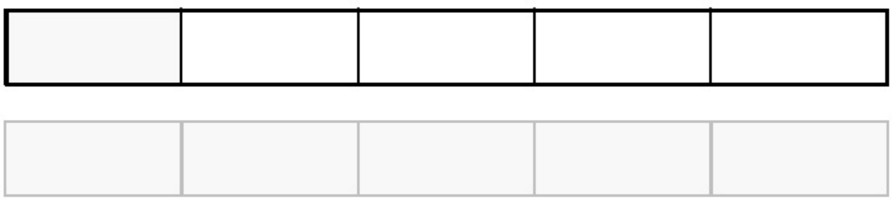
autor, las actividades en las que se reparten equitativamente múltiples enteros implicarían una "paradoja potencial" (p. 278).

Una segunda estrategia que puede ser identificada en la literatura implica familiarizar a los alumnos con el uso de las fracciones en situaciones del tipo parte/todo, para después ampliar sus oportunidades de aprendizaje familiarizándolos con otras ramificaciones del concepto (Mack, 1990); esto con la intención de que "los niños puedan hacerse una idea de la naturaleza esencial de los números racionales" (Lamon, 2007, p. 636). En general, las propuestas de enseñanza de las fracciones, que se han basado en las investigaciones de Kieren (1993, 1980, 1976) y del *Rational Number Project* (cf. Behr *et al.,* 1983; Behr *et al.,* 1992), han asumido esta estrategia. En estas propuestas se procura que los estudiantes tengan experiencias con las fracciones, no sólo como partes de enteros, sino también como medidas, razones, cocientes y operadores (Lamon, 2007).

Entre las críticas que se le han hecho a esta segunda estrategia está la de Thompson y Saldanha (2003), quienes consideran que implica la expectativa de que los estudiantes incorporarán múltiples significados y representaciones en una gran idea que aún no han desarrollado. En consecuencia, para estos autores, se corre el riesgo de que los educandos conciban los racionales como números utilizados en contextos y situaciones múltiples e independientes; por ejemplo, cuando se reparte equitativamente, cuando se mide y cuando se determina el tamaño relativo de algo. Ello sin que desarrollen una comprensión integral del concepto.

La tercera estrategia está presente en los experimentos de enseñanza conducidos por Leslie Steffe y sus colegas (cf. Hackenberg, 2007; Steffe y Olive, 2010;

Figura 5 Un quinto de una “papa a la francesa” representado como una partición equitativa de un tamaño tal, que cinco iteraciones de su longitud equivalen a la longitud de un entero

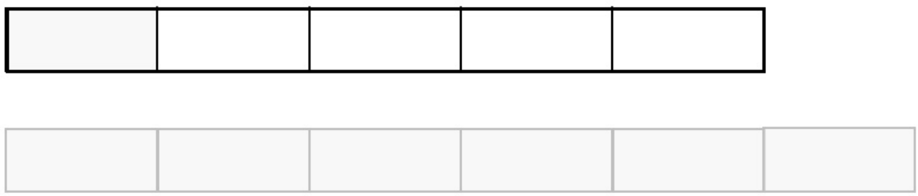


Tzur, 1999; Wilkins y Norton, 2011). En estos experimentos, se procura apoyar el aprendizaje de las fracciones, representando como longitudes las magnitudes que se van a fraccionar, independientemente de que se traten de masas (la masa de una “papa a la francesa”) u otra cosa. Además, la iteración se utiliza como recurso didáctico para ayudar a los estudiantes a razonar sobre el tamaño de las partes en las que se divide un entero (véase la figura 5).

Los resultados obtenidos por Steffe han servido para identificar una trayectoria de aprendizaje de las fracciones que implica el desarrollo de al menos cinco esquemas fraccionarios (cf. Steffe y Olive, 2010; Norton y Wilkins, 2009). En esta trayectoria, los estudiantes inician concibiendo las fracciones como partes discretas de un entero (*esquema fraccionario de parte-todo*). Posteriormente, las entienden como partes que representan un tamaño específico respecto a las otras partes (“todas las partes son del mismo tamaño”; *esquema fraccionario de unidad partitiva*). Después, como partes cuyo tamaño se puede acumular para formar el entero (por ejemplo, “cinco iteraciones de un quinto se acumulan para formar algo del mismo tamaño que un entero”; *esquema fraccionario partitivo*). Y todavía más tarde, como partes cuyo tamaño se puede acumular para formar entidades menores que el entero y de tamaño relativo (por ejemplo, “$^3/_5$ es el resultado de iterar tres veces algo que, si fuera iterado cinco veces, formaría algo del mismo tamaño que un entero”; *esquema fraccionario partitivo reversible*).

El quinto esquema implicaría concebir una parte equitativa de un entero como un tamaño susceptible de ser iterado sin restricciones (*esquema fraccionario iterativo*), sin importar “cómo fue producido (por ejemplo, dividiendo algo en seis partes) o las operaciones que se realizaron en él” (Tzur, 1999, p. 410). Por ejemplo, implicaría reconocer que un quinto puede ser iterado más de

Figura 6 Seis quintos como seis iteraciones de la longitud de la quinta parte de un entero



cinco veces y que, cuando éste es el caso, la magnitud acumulada es mayor que la magnitud del entero (véase la figura 6). En las palabras de Steffe (2002), al desarrollar este esquema fraccionario, un estudiante logra "liberar" la fracción unitaria "del entero que la contiene" (p. 299).

Los resultados obtenidos por Steffe y sus colegas corroboran que la equipartición puede servir de base para el desarrollo de concepciones fraccionarias relativamente complejas. También muestran que el proceso puede resultar tortuoso para los estudiantes, al grado de que muchos pueden no lograr recorrerlo todo. En particular, Norton y Hackenberg (2010) reconocieron en la trayectoria dos transiciones particularmente difíciles de concretar, a las que llamaron *barreras cognitivas*. Como explicamos a continuación, es posible reconocer en ambas barreras la presencia de las imágenes descritas en el apartado anterior.

Norton y Hackenberg (2010) identifican la primera barrera en la transición entre el esquema fraccionario de parte-todo y los esquemas partitivos. Consumar esta transición implica lograr concebir una parte equitativa de un entero no sólo como una parte material de un objeto (por ejemplo, uno de cinco pedazos de una papa a la francesa que fue partida en partes iguales; *esquema fraccionario de parte-todo*), sino también como el tamaño de algo que puede ser iterado (*esquema fraccionario de unidad partitiva*) para formar algo del mismo tamaño que el entero (*esquema fraccionario partitivo*) o menor que éste (*esquema fraccionario partitivo reversible*). En términos de las imágenes descritas, esta transición requeriría que un estudiante se sobrepusiera a la imagen de *la fracción como tantos de tantos*. Esto es, requeriría que superara la concepción de las fracciones como números que dan cuenta de la cardinalidad de conjuntos y subconjuntos, y lograra entenderlas como números que dan cuenta del tamaño de una longitud (u otro atributo).

Norton y Hackenberg (2010) identificaron la segunda barrera cognitiva en la transición entre los esquemas partitivos y el esquema fraccionario iterativo. Consumar esta transición implica lograr concebir una parte equitativa de un entero como el tamaño de algo que puede ser iterado sin restricciones (*esquema fraccionario iterativo*; véase la figura 6) y no sólo para crear tamaños iguales o menores que el entero (*esquema fraccionario partitivo* y *esquema fraccionario partitivo reversible*). En términos de las imágenes descritas, esta transición requeriría que un estudiante se sobrepusiera a la imagen de *la fracción como incluida en un entero*. Esto es, implicaría superar la concepción de las fracciones unitarias como números que dan cuenta de un tamaño que necesariamente está contenido dentro de un entero, para entenderlas como números que dan cuenta del tamaño de algo que puede ser iterado sin restricciones.

Es importante aclarar que, para Norton y Hackenberg (2010), franquear ambas barreras sería parte del proceso de desarrollo cognitivo inherente al aprendizaje de las fracciones. En consecuencia, las barreras que identifican estos autores se entienden de manera consistente con lo que Brousseau (1997) llamó obstáculos de origen ontogenético. De esta manera, el reto pedagógico frente a ellas consistiría en encontrar formas de facilitar que sean franqueadas para permitir que los estudiantes continúen desarrollando concepciones cada vez más complejas de las fracciones.

Nosotros, en cambio, sugerimos explorar la posibilidad de que los obstáculos cognitivos que enfrentan los estudiantes en la trayectoria identificada por Steffe y sus colegas se deriven de imágenes específicas acerca del significado de las fracciones que los estudiantes desarrollan como consecuencia de ser orientados a relacionar el concepto con la equipartición de objetos. Si es éste el caso, la tarea pedagógica consistiría en encontrar maneras de apoyar el aprendizaje de las fracciones que no fomenten el desarrollo de las imágenes arriba descritas. Con ello, ya no se trataría de ayudar a los alumnos a franquear barreras cognitivas, sino de guiarlos por caminos en los que éstas no se presentasen.

A continuación, describimos brevemente dos propuestas para la enseñanza de las fracciones que no recurren al uso de la equipartición. La primera fue desarrollada por Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.*, 2004) y la segunda, por los autores de este artículo (Cortina *et al.*, 2012b). Esta última tiene como base la caracterización hecha por Freudenthal (1983) de la fracción como comparador. Para los propósitos del presente artículo, lo significativo de estas propuestas es que, con su viabilidad, corroboran que las imágenes que emergen de la equipartición, descritas en el apartado anterior, no deben ser consideradas obstáculos ontogenéticos ni epistemológicos –que deben ser superados–, sino obstáculos didácticos susceptibles de ser evitados.

LA FRACCIÓN SIN EQUIPARTICIÓN

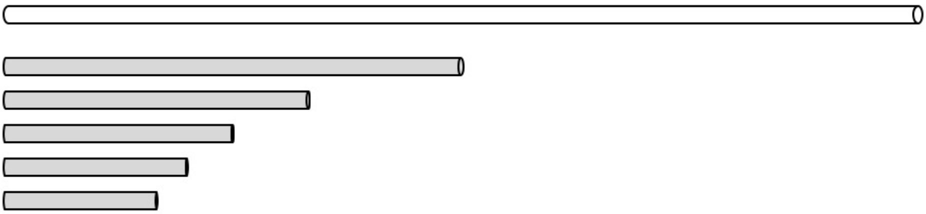
Como parte de una propuesta para la enseñanza de los números racionales y decimales, Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.,* 2004) desarrollaron en la década de 1970 una secuencia de situaciones didácticas para introducir la noción de fracción. Un aspecto importante de esta secuencia es que en ella se espera que sea de la conmensuración, y no de la equipartición, de donde primero emerja la noción de fracción.

La secuencia de Guy y Nadine Brousseau inicia con una serie de actividades en las que los estudiantes comparan el grosor de diferentes tipos de hojas de papel. Finalmente, se establece como método para comparar los grosores la construcción de razones entre una cantidad de hojas y un número de milímetros. Por ejemplo, se determina que el grosor de 25 hojas de un cierto tipo de papel mide 3 milímetros (*25h : 3mm*). Estas razones sirven de base para establecer cadenas de razones equivalentes (*25h : 3mm*; *50h : 6mm*; *75h : 9mm*, etc.) las cuales, a su vez, se utilizan para ordenar los grosores de las hojas por tamaño; por ejemplo, se utilizan para determinar que el grosor de la hoja "*10h : 1mm*" es menor que la de "*25h : 3mm*", ya que la primera es equivalente a "*30h : 3mm*".

El término *fracción* y su notación convencional se introducen como un recurso que sirve tanto para dar cuenta de una clase de razones equivalentes como para designar el grosor de cada tipo de hoja de papel. En la formulación de las fracciones, se utiliza el número de milímetros como numerador y el número de las hojas de papel como denominador. Con este referente, posteriormente se introducen las operaciones de la adición de fracciones (presentada como el resultado de pegar hojas de dos o tres grosores diferentes) y de sustracción (la comparación entre el grosor de dos tipos de hojas). Las fracciones impropias se representan como hojas cuyo grosor es mayor que un milímetro (por ejemplo, la fracción $^5/_4$ implicaría cierto tipo de hoja, donde el grosor de cuatro de ellas equivale a cinco milímetros).

La secuencia de Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.,* 2004) se utilizó con estudiantes de diez y once años de edad en dos diferentes aulas durante diez años. Los autores informan que, en general, obtuvieron resultados positivos.

Figura 7 La vara y los pequeños de a dos ($^1/_2$), de a tres ($^1/_3$), de a cuatro ($^1/_4$), de a cinco ($^1/_5$) y de a seis ($^1/_6$)



Las notas de estudiantes en matemáticas fueron buenas en los grados subsiguientes, particularmente en el tema de fracciones.

Un segundo ejemplo de una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones, que no se fundamenta en la equipartición, es la desarrollada por los autores del presente artículo (Cortina *et al.,* 2012b). En ella se retoma la caracterización, hecha por Freudenthal (1983), de la fracción como comparador. En consecuencia, se busca cultivar en los alumnos desde temprano la imagen de una fracción unitaria como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo en algo que está separado de la unidad de referencia.

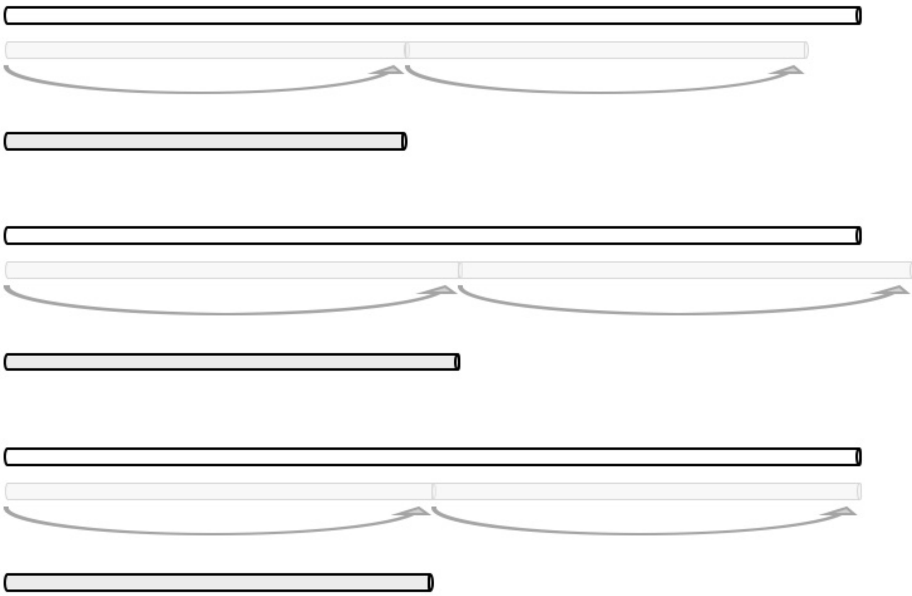
Para cultivar dicha imagen, se diseñaron una serie de actividades con las que se procura que los niños experimenten la "reinvención" de la medición lineal. En éstas se utiliza una narrativa sobre las maneras en que medía un grupo legendario de antiguos mayas (los acajay). Primero se explora la medición utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.). Posteriormente, se explora la medición utilizando como medida estandarizada una vara (de 24 cm aproximadamente).

A partir de la experiencia de medir con la vara, se introduce el problema de cómo crear unidades de medida más pequeñas para dar cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios que la vara no cubre exactamente. La solución que se presenta a los alumnos, como la desarrollada por los acajay, consiste en crear varas más pequeñas, llamadas pequeños, que tienen la característica de cumplir con un criterio iterativo respecto a la vara (véase la figura 7). Utilizando popotes de plástico[5] y tijeras, los estudiantes crean estos pequeños.

Se les pide primero a los estudiantes que produzcan un pequeño de a dos

[5] *Popote* es el nombre utilizado en México para las pajillas para sorber líquidos.

Figura 8 Manipulación de un popote para que cumpla con la condición de que dos iteraciones de su longitud correspondan exactamente a la longitud de la vara



(esto es, un popote cuya longitud corresponde a un medio de la vara). Se les explica que sería un popote de un tamaño tal que dos iteraciones de su longitud cubrirían exactamente la longitud de la vara. Los estudiantes entonces manipulan la longitud de un popote, que al principio es ligeramente más corto que la vara. Cuando lo iteran y notan que la segunda iteración rebasa la longitud de la vara, cortan el popote con las tijeras (véase la figura 8). Cuando la segunda iteración resulta ser más corta que la vara, los estudiantes desechan el popote y comienzan el proceso con uno nuevo. Probando varias veces, los estudiantes finalmente obtienen un popote que cumple con la condición acordada.

A continuación, utilizando este método, los estudiantes producen otros pequeños (por ejemplo, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ y $^1/_6$). Los pequeños producidos se utilizan, primeramente, para apoyar formas de razonamiento consistentes con *la relación de orden inverso* (Tzur, 2007), presente en las fracciones unitarias. Por ejemplo, se utilizan para reflexionar sobre qué sería más largo, un pequeño de a ocho o un pequeño de a nueve ($^1/_8$ *vs.* $^1/_9$).

Posteriormente, los pequeños se utilizan para crear tiras de papel de una longitud específica. Por ejemplo, se les puede pedir que creen una tira cuya longitud equivalga a seis iteraciones del pequeño de a cinco (esto es, $^6/_5$). Estas tiras sirven de base fenomenológica para ayudar a que los alumnos razonen sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas. Por ejemplo: ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una vara ($^6/_5$ *vs.* 1)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una que midiera siete pequeños de a ocho ($^6/_5$ *vs.* $^7/_8$)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera cuatro pequeños de a cuatro o una que midiera siete pequeños de a siete ($^4/_4$ *vs.* $^7/_7$)?

La propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones desarrollada por nosotros (Cortina *et al.,* 2012b) se asemeja a la desarrollada por Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.,* 2004) en que se espera que sea la conmensuración, y no la equipartición, la que sirva para dar significado a las fracciones. Las dos propuestas se diferencian en los referentes fenomenológicos que ofrecen de qué sería una unidad y qué sería una fracción no unitaria. En el caso de nuestra propuesta, el referente de la unidad es la longitud de un objeto concreto, *la vara*, mientras que en el caso de la propuesta de Guy y Nadine Brousseau es una de las subunidades del sistema métrico decimal, *el milímetro*.

En relación con las fracciones no unitarias, en nuestra propuesta se esperaría que su referente fuera la iteración de la longitud de una fracción unitaria (un pequeño). Por ejemplo, se esperaría que la fracción $^2/_3$ fuera interpretada por los estudiantes como una longitud que resulta de iterar dos veces el pequeño de a tres. En el caso de la propuesta de Guy y Nadine Brousseau, ese referente sería el número de hojas, de un cierto tipo de papel, necesarias para completar un número entero de milímetros. Por ejemplo, se esperaría que la fracción $^2/_3$ fuera interpretada como el grosor de un tipo de papel que tendría la característica de ser tal que tres hojas de ese tipo cubrirían la longitud de dos milímetros.

Los resultados de la investigación realizada por nosotros muestran que puede ser viable una propuesta didáctica basada en la caracterización, hecha por Freudenthal (1983), de la fracción como comparador. En general, hemos encontrado que los estudiantes de tercer y cuarto grados de primaria cuentan con las nociones e intuiciones necesarias para involucrarse de manera productiva en estas actividades. Además, hemos documentado que este tipo de propuestas son útiles para apoyar a que los estudiantes razonen de maneras consistentes con la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina *et al.,* 2012b).

COMENTARIOS FINALES

En muchas de las culturas del mundo es posible reconocer el fuerte vínculo semántico que se ha creado entre las fracciones y la equipartición. Este vínculo, a pesar de no estar presente en la definición matemática formal, aparece en los significados de las palabras que comúnmente se utilizan para nombrar las fracciones. Como hizo notar Freudenthal (1983), una multitud de lenguas utilizan palabras que remiten a la idea general de *partir*, *quebrar*, *fragmentar*, para nombrar al concepto. Además, mucha gente –incluidos maestros y padres de familia– asocia la idea de fracción con la necesaria fragmentación de algo en partes iguales.

Con estos antecedentes, proponer que se evite el uso de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones puede parecer una insensatez. Pero no hay que perder de vista los resultados de las pruebas que nos sugieren que, en el ámbito global, son muy pocos los alumnos que alcanzan niveles satisfactorios de comprensión del concepto. Teniendo en cuenta que el aprendizaje de las fracciones es central en el desarrollo del pensamiento multiplicativo de los estudiantes y, en general, en su desarrollo cuantitativo y matemático (Thompson y Saldanha, 2003; Lamon, 2007), los resultados de esas pruebas justifican la revisión de los supuestos que por mucho tiempo han guiado a la didáctica de las fracciones; incluido el que considera la equipartición, si no como el único, sí como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los niños.

En el presente artículo, retomando los análisis de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), explicamos por qué la equipartición puede ser considerada una fuente de obstáculos para el desarrollo de concepciones maduras de las fracciones cuando se utiliza como el medio principal para introducir el concepto. También explicamos por qué se trata de obstáculos que pueden ser evitados, puesto que su origen no está ni en el desarrollo cognitivo ni en la propia disciplina matemática, sino en la didáctica (Brousseau, 1997). Esperamos que el interés por indagar sobre la viabilidad de apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias, utilizando contextos distintos de la equipartición –ya sea la conmensuración u otros– se despierte en más investigadores, así como el interés por explorar qué existe más adelante.

Nuestra intención al escribir este artículo ha sido promover la revisión crítica de uno de los supuestos que ha guiado los esfuerzos pedagógicos respecto a un concepto que, a pesar de ser fundamental para el desarrollo matemático de los educandos (Thompson y Saldanha, 2003; Lamon, 2007), pocos logran comprender de manera adecuada. Con ello, esperamos haber contribuido a la búsqueda de vías didácticas alternativas en el campo de las fracciones que permitan que muchos más estudiantes logren entender este concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Backhoff, E., E. Andrade, A. Sánchez, M. Peon y A. Bouzas (2006), *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1992) "Rational Number, Ratio, and Proportion", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 296-333.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational Number Concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-125.

Bills, C. (2003), "Errors and Misconceptions in KS3 'Number'", en J. Williams (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Londres, vol. 23, núm. 3, pp. 7-12.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Brousseau, G., N. Brousseau y V. Warfield (2004), "Rationals and Decimals as Required in the School Curriculum. Part 1: Rationals as Measurement", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, núm. 1, pp. 1-20.

Clarke, D.M. y A. Roche (2009), "Students' Fraction Comparison Strategies as a Window into Robust Understanding and Possible Pointers for Instruction", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 72, núm. 1, pp. 127-138.

Confrey, J. y A. Maloney (2010), "The Construction, Refinement, and Early Validation of the Equipartitioning Learning Trajectory", en K. Gomez, L. Lyons y J. Radinsky (eds.), *Learning in the Disciplines: Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences*, Chicago, International Society of the Learning Sciences, vol. 1, pp. 968-975.

Cortina, J.L., E.R. Cardoso y C. Zúñiga (2012a), "El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 14, núm. 1, pp. 71-85.

Cortina, J.L., J. Visnovska y C. Zúñiga (2012b), "Alternative Starting Point for Teaching Fractions", en J. Dindyal, L.P. Cheng y S.F. Ng (eds.), *Mathematics Education: Expanding Horizons. Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, eBook, Singapur, MERGA, pp. 210-217.

Davis, G.E., R.P. Hunting y C. Pearn (1993), "What Might a Fraction Mean to a Child and How Would a Teacher Know?", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, pp. 63-76.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Holanda, Kluwer.

Gould, P., L. Outhred y M. Mitchelmore (2006), "One-third is Three-quarters of One-half", en P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australiasia*, Adelaide, Australia, MERGA, pp. 262-269.

Hackenberg, A.J. (2007), "Units Coordination and the Construction of Improper Fractions: A Revision of the Splitting Hypothesis", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 26, núm. 1, pp. 27-47.

Hannula, M.S. (2003), "Locating Fraction on a Number Line", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulú, PME, vol. 3, pp. 17-24.

Hart, K. (1981), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, Oxford, Reino Unido, J. Murray.

Kieren, T.E. (1976), "On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Number", en R. Lesh (ed.), *Number and Measurement*, Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 101-144.

____________ (1980), "The Rational Number Construct –Its Elements and Mechanisms", en T.E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

____________ (1993), "Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding", en T.P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlabaum, pp. 50-84.

Lamon, S.J. (2007), "Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research", en F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, Information Age Pub., pp. 629-667.

Mack, N.K. (1990), "Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 1, pp. 16-32.

Norton, A. y A.J. Hackenberg (2010), "Continuing Research on Students' Fraction Schemes", en L. Steffe y J. Olive (eds.), *Children's Fractional Knowledge*, Nueva York, Springer, pp. 341-352.

Norton, A. y J.L.M. Wilkins (2009), "A Quantitative Analysis of Children's Splitting Operations and Fraction Schemes", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 28, núms. 2-3, pp. 150-161.

Pitkethly, A. y R. Hunting (1996), "A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm. 1, pp. 5-38.

Post, T., K.A. Carmer, M. Behr, A. Lesh y G. Harel (1993), "Curriculum Implications of Research on the Learning, Teaching and Assessing of Rational Number Concepts", en T.P. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Steffe, L.P. (2002), "A New Hypothesis Concerning Children's Fractional Knowledge", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, núm. 3, pp. 267-307.

Steffe, L.P. y J. Olive (2010), *Children's Fractional Knowledge*, Nueva York, Springer.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Thompson, P.W. y L.A. Saldanha (2003), "Fractions and Multiplicative Reasoning", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Tzur, R. (1999), "An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting that Learning", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, núm. 4, pp. 390-416.

____________ (2007), "Fine Grain Assessment of Students' Mathematical Understanding: Participatory and Anticipatory Stages in Learning a New Mathematical Conception", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 66, núm. 3, pp. 273-291.

Wilkins, J.L.M. y A. Norton (2011), "The Splitting Loope", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 42, núm. 4, pp. 386-416.

DATOS DE LOS AUTORES

José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, México
jcortina@upn.mx

Claudia Zúñiga
Universidad Iberoamericana, México
clamaka@prodigy.net.mx

Jana Visnovska
The University of Queensland, Australia
j.visnovska@uq.edu.au

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia

David Block, Patricia Martínez, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez

Resumen: A partir de una experiencia de formación en didáctica de las matemáticas dirigida a maestros-formadores, se estudian las condiciones en las que la observación y el análisis de prácticas de enseñanza pueden adquirir un valor formativo. El curso se impartió en una modalidad semipresencial y se centró en el estudio de cuatro temas de matemáticas y su didáctica: la proporcionalidad, la división euclidiana, las fracciones y la medición. Se destaca la dificultad para centrar la mirada en cuestiones relacionadas con el conocimiento en cuestión y se revisan algunos factores que pueden ayudar a superar dicha dificultad, en particular, la realización conjunta de análisis cuidadosos de las situaciones previamente a su puesta en práctica.

Palabras clave: Formación de maestros, prácticas de enseñanza de las matemáticas.

Résumé: A partir d'une expérience de formation en didactique des mathématiques adressée à des enseignants, nous présentons une réflexion sur les conditions dans lesquelles l'observation et l'analyse de classes de mathématiques peuvent acquérir une valeur pour la formation. L'expérience a été réalisée sur un mode semi-face et s'est consacré à l'étude de quatre sujets en mathématiques et son enseignement: la proportionnalité, la division euclidienne, les fractions et la mesure. Nous mettons en évidence la difficulté à viser les connaissances mathématiques impliquées et nous dégageons certains facteurs qui peuvent être favorables, en particulier la réalisation conjointe d'une analyse minutieuse des situations, avant leur mise en œuvre dans la classe.

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2012; fecha de aceptación: 11 de julio de 2013.

Mots clés: La formation des enseignants, pratiques d'enseignement des mathématiques.

Abstract: We study the conditions under which the observation and analysis of teaching practices can turn out to be valuable tools on teachers training processes. Our discussion is based on the results of a course on mathematics education with teacher-trainers, which was conducted combining online and face-to-face sessions. The course was focused on the study of four topics in mathematics and its teaching: proportionality, Euclidean division, fractions and measurement. We highlight the difficulty of focusing the analysis on mathematical knowledge, and point out certain factors that can help improving such difficulty, particularly, the collective carry out of a careful analysis of the didactical situation before its implementation.

Keywords: Teachers' training, mathematics teaching practices.

INTRODUCCIÓN: UNA MODALIDAD DE FORMACIÓN

Hay un fuerte énfasis, hoy día, en cuanto a la pertinencia de vincular los cursos de formación de maestros con la práctica. Se considera que es en el salón de clase donde es posible identificar las dificultades y enfrentarlas, donde se puede valorar la factibilidad de las propuestas que se hacen a los maestros y donde es viable apuntalar los intentos de mejora y los logros (Perrin-Glorian, Deblois y Robert, 2008; Lerner, 2001; Hersant y Perrin-Glorian, 2005; Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007). Se considera también que la reflexión sobre la propia práctica ofrece la posibilidad de constituir un recurso valioso en la actualización, cuando se realiza con una intencionalidad formativa específica y se enriquece mediante la mirada de otros, especialistas o colegas (Margolinas, Coulange y Bessot, 2005).

En esta línea de vinculación y reflexión sobre la práctica, nos propusimos explorar una modalidad de formación centrada en la realización de experiencias en aula, su documentación y análisis en el marco de un curso sobre enseñanza de las matemáticas dirigido a docentes, principalmente de primaria y secundaria, algunos de ellos formadores y asesores de maestros de educación primaria. Las numerosas producciones escritas que los participantes generaron a lo largo del curso permiten identificar algunos logros y también dificultades en la puesta en práctica de dicho recurso. Nos parece que la explicitación de este proceso puede aportar a la búsqueda de formas de trabajo con los maestros en las que el vínculo con la práctica resulte fecundo.

En un primer apartado se presentan aspectos metodológicos del estudio; enseguida, en el apartado 2, se describen brevemente las principales características del curso; después, en el apartado 3, se expone el análisis de varios aspectos de las producciones de los maestros participantes. Finalmente, a modo de conclusión, en el apartado 4 se desarrolla una reflexión sobre las estrategias empleadas para vincular el curso con la práctica.

1. ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

La experiencia que se analiza en el presente estudio no fue concebida en el marco de una investigación, sino como respuesta a un servicio solicitado por terceros. A partir de la experiencia ya consumada y debido al interés que algunos de los procesos a que dio lugar parecieron tener en el contexto de la discusión actual sobre formación docente, consideramos oportuno explicitar el fundamento de la experiencia, ubicarlo en el campo de las propuestas que actualmente se discuten e informar algunos de los resultados.

Como se verá en el apartado siguiente, la estrategia de formación que se puso en marcha se alimenta de dos grandes tradiciones de la investigación en el campo: por una parte, se recurre a la aplicación de situaciones didácticas sobre conocimientos específicos de matemáticas diseñadas *ex profeso* para profesores en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) y, por otro lado, se propicia la puesta en práctica por los profesores, con alumnos del nivel básico, de situaciones elegidas y adaptadas o diseñadas por ellos, así como la realización de análisis de dichas prácticas. Esto último equivale a asumir la práctica del profesor en el salón de clases como una situación didáctica para él, situación en la que el medio con el que interactúa es la propia relación de sus alumnos con el conocimiento (Margolinas y Perrin-Glorian, 1997, pp. 7-15).

La elección de la TSD como marco teórico de referencia conlleva, naturalmente, la adopción de ciertos presupuestos sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, que *grosso modo* pueden calificarse de constructivistas: los alumnos pueden desarrollar conocimientos de matemáticas al resolver determinado tipo de problemas y, al hacerlo, se generan mejores condiciones para que éstos sean significativos para ellos; dichos conocimientos pueden ser al principio implícitos, incompletos o parcialmente falsos; es necesario que el profesor haga un trabajo de institucionalización, en el que se explicitan, se nombran, se adoptan convenciones, se destaca su importancia o su vínculo con otros conocimientos. Las situaciones que permiten que los alumnos desarrollen nuevos conocimientos, llamadas "adidácticas" en la TSD, tienen características especiales: deben implicar al conocimiento en cuestión, deben poderse abordar sin disponer de dicho conocimiento; deben permitir validar los intentos de resolución.

La motivación del presente estudio es contribuir al conocimiento de las condiciones que pueden favorecer en los profesores procesos de aprendizaje del contenido por enseñar y su didáctica. Más específicamente, busca conocer relaciones entre las condiciones por las que optamos en la experiencia y algunos de los resultados que logramos identificar. En este sentido, el planteamiento metodológico del estudio es el de una ingeniería didáctica[1] para profesores (Artigue *et al.*, 1995).

2. CARACTERÍSTICAS DEL CURSO

2.1. Puntos de partida y organización de las sesiones

Se trata de un curso de actualización en la enseñanza de las matemáticas,[2] dirigido a un grupo integrado por 42 maestros con diferentes funciones: maestros de escuela de organización completa y multigrado, maestros de apoyo técnico pedagógico (ATP), asesores y formadores de maestros de educación básica. Gran parte de ellos, 31 de 42, cursó estudios en la Normal Superior, 20 en la especialidad de matemáticas. La mayoría tiene algún estudio de posgrado.

El curso se impartió en una modalidad semipresencial y tuvo una duración de aproximadamente 90 horas (48 presenciales). Se utilizó una plataforma educativa de software libre para cursos a distancia (*Moodle*) con espacios públicos en los que los maestros podían participar en foros y tener acceso al programa

[1] Las principales características de esta metodología de investigación son: la puesta en práctica del fenómeno (la clase, la secuencia, etc.) que se desea estudiar; el desarrollo de un análisis preliminar amplio que justifica las decisiones tomadas y hace explícitos los efectos esperados de las situaciones; un análisis *a posteriori* mediante una contrastación entre los análisis previos y lo observado en la puesta en práctica.

[2] *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, impartido en el ciclo escolar 2009-2010 en la ciudad de Tepic, Nayarit.

del curso y a la bibliografía, así como espacios privados para cada participante, en los que cada uno depositaba sus trabajos y recibía comentarios. Además, durante el curso se mantuvo la comunicación por correo electrónico. En el anexo 1 se esquematiza en un cuadro la secuencia de actividades.

El equipo a cargo del curso estuvo integrado por cuatro participantes que tuvieron como tarea diseñar, impartir los talleres y asesorar a un grupo de maestros. Se elaboró un cuadernillo de trabajo para cada sesión.

Considerando la necesidad de apuntalar el conocimiento matemático y didáctico de los docentes del nivel básico (Schulman, 1986; Ball y Bass, 2000; Godino, Batanero y Flores, 1998; Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007), el curso se centró en el estudio de cuatro temas de matemáticas y su didáctica: la proporcionalidad, la división euclidiana, las fracciones y la medición. En cada reunión se llevó a cabo un taller centrado en alguno de estos temas.[3]

La estrategia de vinculación con la práctica estuvo integrada por un conjunto de acciones que explicamos a continuación. Se realizaron cuatro eventos presenciales de 12 horas cada uno (en sesiones de cuatro horas), separados entre sí por aproximadamente siete semanas. En este lapso, los maestros, organizados en parejas, diseñaban o elegían una situación didáctica relacionada con el tema estudiado en la sesión anterior, elaboraban un plan de clase y lo enviaban a los asesores del curso por correo electrónico y/o a través de la plataforma que se creó para tal efecto. Los asesores revisaban y comentaban el plan con la idea de contribuir a mejorarlo, compartiendo así la responsabilidad de éste con los maestros.

Los maestros, organizados en parejas, llevaban a cabo la experiencia en el aula, uno conduciendo la clase, el otro observando; en la siguiente sesión se invertían los papeles. Después, juntos preparaban un informe sobre lo acontecido. Si bien se dio un guion para elaborar el informe, se les dio libertad para recuperar lo que consideraran relevante.

Los informes de observación eran enviados a los asesores junto con la segun-

[3] Cada sesión presencial se dividía en dos partes, una centrada en un tema de matemáticas y su didáctica, y la otra en el análisis de experiencias llevadas a cabo en aula entre una sesión del curso y otra. Los principales tipos de actividad de los maestros fueron: *1)* participación como estudiantes en el desarrollo de situaciones didácticas sobre temas de matemáticas diseñadas para profesores, pero con características didácticas similares a las que se busca promover en la escuela básica, y análisis posterior de las características (estrategia basada en la homología) (Houdement y Kusniak, 1996, p. 301); *2)* análisis de programas, lecciones de libros de texto, las actividades desarrolladas por los profesores participantes, la producciones de los alumnos y la conducción de las clases por parte de los participantes, y *3)* discusión en torno a textos de didáctica.

da versión del plan de clase al menos una semana antes de la siguiente sesión presencial, de manera que hubiese tiempo de elaborar comentarios y preparar el análisis que se haría con todo el grupo en la sesión presencial siguiente.

Los informes de los maestros daban lugar a dos tipos de realimentación; por una parte, cada pareja de maestros recibía de su asesor por correo electrónico (y en la plataforma educativa *Moodle*) comentarios a su informe que no eran compartidos con el resto del grupo. Por otro lado, del conjunto de informes enviados, los asesores escogían algunas cuestiones que consideraban de interés general para desarrollar con todo el grupo. Previamente, se pedía el consentimiento de los maestros cuyos informes serían utilizados.

Mediante la vinculación con el trabajo en el salón de clases, se procuró favorecer que los profesores identificaran de manera cada vez más precisa características didácticas relevantes de las situaciones que llevaban al aula, tanto en lo que se refiere a la situación planeada como a la situación realizada, considerando la conducción del maestro y la actuación de los alumnos.

Los registros de clase elaborados a partir de las observaciones que hicieron los maestros tuvieron una doble función: para la formación de los docentes, una herramienta que les permite centrar su atención en lo que pasa en el aula al interactuar con un contenido específico, y para los diseñadores/investigadores, una herramienta para elaborar materiales que orientaron la reflexión sobre aspectos específicos de la puesta en práctica de algunas situaciones didácticas (para la discusión en las sesiones).

A continuación, describimos el tipo de realimentación que brindaron los asesores a los maestros de manera individual con respecto a los planes y los informes de clase. Si bien en el apartado 3 hacemos algunos comentarios críticos sobre dicha realimentación, quedará como una tarea pendiente un análisis más sistemático de ésta en términos de lo que pudo aportar a los maestros.

2.2. El papel de los asesores

2.2.1. Comentarios a los planes de clase

Los comentarios se centraron en el diseño de la actividad y en su justificación. Con respecto a lo primero, se hacían precisiones en las tareas planteadas o en las consignas, se destacaban las ventajas de alguna decisión, se señalaban avances respecto a un plan anterior y se contribuía al análisis de la tarea, entre otros aspectos. Por ejemplo, en un problema redactado por unos maestros, después de indicar cuántos litros de pintura negra y blanca tienen tres mezclas, se pedía a los alumnos que escribieran "la razón que corresponde a cada mezcla de la forma *n*/*b*, donde *n* significa litros de pintura negra y *b* significa litros de pintura blanca". El asesor comentó lo siguiente:

> [...] por la manera en que ustedes piden que escriban la razón con una fracción, los alumnos pueden observar que simplemente la cantidad de pintura negra se pone en el numerador, la de blanca en el denominador y luego se simplifica. Ésta es una regla aparentemente sencilla pero muy poco clara para los alumnos [...]

Se solicitó a los maestros que, para cada problema planteado, anticiparan algunos procedimientos de resolución, dificultades y errores probables, así como algunas acciones que seguir. El tipo de comentario más frecuente fue para señalar aspectos no previstos por los maestros en los procedimientos anticipados, por ejemplo: en un grupo multigrado de 4º, 5º y 6º, en el plan de clase se presentó una tabla en la que se dieron datos de varios repartos (número de galletas, número de niños) y se pidió a los alumnos que indicaran, para cada reparto, "la parte o fracción que les toca"; los maestros previeron algunos procedimientos que podían surgir en la clase:

> Es posible que algunos alumnos utilicen dibujos para ilustrar y pensar mejor el problema, esto a mi juicio es válido, ya que en ocasiones el alumno necesita este tipo de recursos gráficos para entender el problema [...]

El asesor escribió el siguiente comentario:

> [Se aconseja] explicitar los procedimientos, por ejemplo, repartir las galletas una por una entre el número de niños indicado en cada reparto. Esto puede ser importante para entender por qué *a* entre *b* = *a*/*b*; [...] Es probable que los alumnos hagan una división y obtengan números decimales. Por ejemplo, 1 entre 2 = 0.5. ¿Cómo comprobar que este resultado es equivalente a 1/2? En el caso de 3 entre 5, si obtienen 0.6, ¿cómo ayudarlos para que entiendan que 0.6 = 3/5 y a 6/10? Una forma es que expresen 0.6 como 6/10 y plantear preguntas para que simplifiquen esta expresión y obtengan 3/5.

2.2.2. Comentarios sobre los informes de clase

Los comentarios de los asesores a los informes de clase enviados por los maestros tendieron a centrarse en las resoluciones de los alumnos y en la relación de éstas con la situación. En menor medida, versaron sobre la conducción del maestro. También se hicieron comentarios sobre la riqueza de datos relevantes recogidos en los registros o sobre la falta de datos. A título de ejemplo, veamos algunos de los comentarios de los asesores.

Se sugirió recuperar y profundizar en el análisis de procedimientos de los alumnos, por ejemplo:

> [...] Se sugiere que, además de enviar hojas de trabajo de los alumnos, se retomen algunos ejemplos para analizar en el interior del propio registro. Incluir tanto procedimientos exitosos como los que no lo fueron [...] identificar lo que hacen los alumnos y qué implica que utilicen determinados procedimientos en términos de eficacia, de tiempo [...]

Se relacionaron procedimientos, dificultades o errores con alguna variable específica de la situación.

> En el reparto 4 (entre) 6 se puede dar 1/2 chocolate a cada niño y el chocolate que queda se divide naturalmente en sextos. En cambio, en el reparto 2 (entre) 3, [si se da 1/2 a cada uno] el sobrante es 1/2 y, como se observa, varios niños no lograron identificar que 1/3 de un medio es equivalente a 1/6, pues no resulta evidente para ellos.

Asimismo, se les invitó a reflexionar sobre formas de propiciar la evolución de procedimientos; se valoró tanto la identificación de procedimientos correctos y las dificultades de los alumnos como la toma de decisiones, que permitió que la clase no se estancara en una dificultad que, en ese momento, no estaba al alcance de los alumnos resolver. También se solicitó hacer precisiones en relación con los materiales de trabajo que estaban usando los alumnos, el grado que cursan cuando se trataba de escuelas multigrado, las intervenciones del profesor en relación con algunas participaciones de los alumnos.

2.3. Las actividades grupales para el análisis de los planes e informes de clase

En tres de las cuatro sesiones presenciales se dedicó un espacio[4] para analizar algunos aspectos de interés general, relativos a los planes de clase y a los informes realizados por los participantes durante el periodo intertalleres. Los temas tuvieron que ver con los procedimientos de los alumnos, con características de los problemas planteados, y también, aunque en menor medida, con la conducción de la clase. En el anexo 2 se describen los temas abordados en estas sesiones.

3. ALGUNOS RESULTADOS: LOS FENÓMENOS QUE MIRAN –Y LOS QUE NO MIRAN– LOS MAESTROS

Los maestros no miran necesariamente lo que los investigadores o los formadores suponen ni, por tanto, reciben siempre la realimentación de la experiencia que se podría pensar (Margolinas, Coulange y Bessot, 2005). En esta experiencia de formación nos preguntamos ¿dónde ponen los docentes la mirada? ¿Qué les interesa analizar respecto a sus clases? ¿Qué tanta cercanía hay entre los asuntos que los ocupan y los que a nosotros nos interesa que aprendan a observar? ¿Hay factores que influyen en lo que observan? A continuación, abordamos estas cuestiones a partir del análisis de los planes y registros de clase.

3.1. Mirar la relación de los alumnos con el conocimiento: una necesidad que se construye

En ocasiones, los registros de clase fueron muy generales. Eran descripciones un tanto idealizadas del desempeño del maestro y prestaban escasa atención a cuestiones relacionadas con el contenido por enseñar, como en el siguiente ejemplo:

> El maestro observó con detalle las actividades que hacían los equipos interactuando y resolviendo las dudas que cada uno de ellos tenía sobre la

[4] De entre dos y cuatro horas de las 12 disponibles.

> actividad [...] En el momento del cierre, el maestro explicó que los resultados obtenidos por cada uno de los equipos fue el correcto respecto a cada caso planteado. Finalmente, resaltó que el cálculo de fracciones es muy útil para el conocimiento cognitivo matemático y para resolver problemas de la vida cotidiana [...] los conocimientos y el interés en la asignatura de matemáticas fueron aceptables.

En otros registros hay manifestaciones incipientes de la producción de los alumnos. En el siguiente ejemplo de 2º grado, no obstante que los maestros informaron haber identificado "diversidad de formas para aplicar recursos de solución a los problemas", decidieron dar cuenta con cierto detalle de la cantidad de respuestas correctas. Informaron números, pero éstos no se interpretaron:

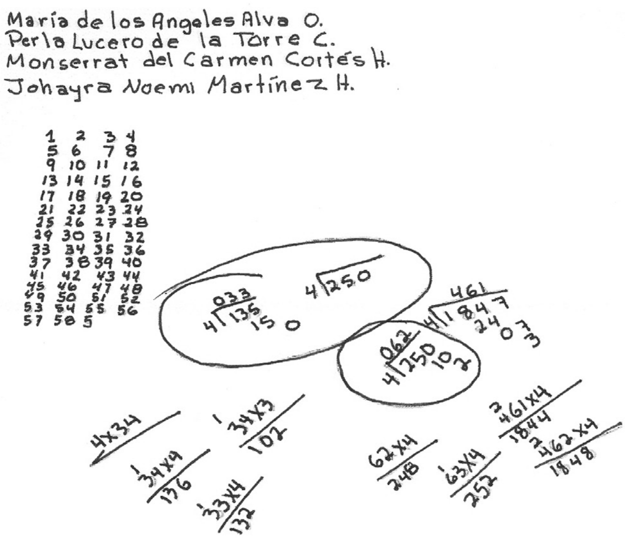
> En la parte de los problemas, al analizar los resultados, el equipo que muestra el más alto número de respuestas es el equipo 3, con seis respuestas correctas y el que menos obtuvo fue el equipo 4, que contestó cinco de ocho problemas, de los cuales sólo tres fueron correctos. El problema que más se entendió y el cual todos los equipos hicieron bien fue el número 3 [...]

Desde los primeros comentarios que los asesores hicieron a los maestros, se les invitó a enriquecer los registros y prestar atención principalmente a las producciones de los alumnos. En algunos casos, los registros de los maestros se hicieron, en efecto, cada vez más detallados, incluso con apoyo de fotografías o copias de las hojas de trabajo de los alumnos, como se ve en el siguiente ejemplo del tercer registro de una pareja. Los maestros aplicaron, en un grupo de secundaria, un problema similar a otro que ellos resolvieron en el taller:

Un grupo de niños y niñas fue ordenado de la siguiente forma:

1 2 3 4	¿En qué renglón está el 16? ¿En qué columna?
5 6 7 8	¿En qué renglón y en qué columna irá el 25?
9 10 11	¿En qué renglón y en qué columna irá el 135, el 250,
12	el 1 847?
13 14 15	¿Cómo se obtiene el renglón y la columna?
16	¿Cuál es el papel del cociente y el residuo de este
17 18 19	problema?
20	¿Cuál sería la expresión algebraica que permite obtener el
21...	renglón o columna donde está un niño(a)?

En el equipo de Montserrat y Noemí sí lograron obtener la posición de los números 135, 250 y 1 847, como se observa a continuación, y de alguna manera expresa el sentido que da el cociente y el residuo en las divisiones que realizan.



Los maestros hicieron una descripción amplia de los procedimientos y apreciaron en ellos, por ejemplo, la aparición de la división en un problema en el que el cociente y el residuo tenían sentido. La valoración de la diversidad de procedimientos fue bastante frecuente. En ocasiones, se manifestó mediante una diferenciación tajante entre procedimientos formales y los que implican "uso de material":

> La clase fue provechosa porque nos permitió darnos cuenta de que los procedimientos que realizan en cada grupo son variados, ya que hay alumnos que realizan la resolución de problemas con los procesos formales (igualar cantidades) hasta llegar a alumnos que requieren el material para realizar el proceso de manera física mediante procesos informales.

Otra expresión de la atención puesta en la diversidad de procedimientos fue la realización de clasificaciones, con un intento de jerarquizar las resoluciones de menos a más avanzadas, por ejemplo, en una situación de reparto de chocolates (que comentaremos en el punto 3.2.2), el maestro clasificó las resoluciones de la siguiente manera:

I. Procedimientos que no son ni equitativos ni exhaustivos
II. Procedimientos para repartir en partes iguales pero con sobrante
III. Procedimientos equitativos y exhaustivos

Aunque estas clasificaciones no llegaron a ser utilizadas como un medio de encontrar mejores formas de continuar la clase, con lo cual su razón de ser quedó hasta cierto punto ambigua, pueden haber desempeñado un papel en la valoración de la diversidad de procedimientos que desarrollan los alumnos. Cabe destacar que el mayor cuidado en los detalles no significó inmediatamente una mayor comprensión de los procedimientos de los alumnos. La descripción de las producciones de los estudiantes no siempre las convierte inmediatamente en objeto de análisis o comentarios. La función de la realimentación individual por parte de los asesores y de la discusión colectiva en las sesiones presenciales fue ayudar a enriquecer las interpretaciones de los maestros.

La posibilidad de hacer observables y describir asuntos que tienen que ver con la problemática del contenido parece depender de varios factores: *1)* los casos en los que se puede ver una clara evolución de los registros sugieren ciertos aprendizajes logrados a partir del taller; *2)* cierta heterogeneidad en los registros producidos por los propios maestros nos llevó a considerar también que unos temas más que otros, posiblemente los que mejor conocen, permiten un análisis más fecundo, y *3)* finalmente, también pareció influir el hecho de que los maestros hubieran llevado a cabo la situación en vivo como aprendices y que ésta les resultara interesante y les permitiera enfrentar dificultades parecidas a las que después enfrentarían sus alumnos.

3.2. Una cuestión más difícil: la interpretación de procedimientos y errores

Una dificultad que se puso de manifiesto en los informes de clases, mayor que la de identificar los procedimientos de resolución y los errores de los alumnos, fue la de explicarlos. En la búsqueda de las causas, la complejidad de la propia situación o la del procedimiento que se esperaba fueron difíciles de mirar.

3.2.1. Difícil ver que la dificultad esté en la propia lección

En primer grado se planteó una tarea tomada de una lección del libro de texto (SEP, 2009, p. 133). El problema planteado en el informe de los maestros fue el siguiente:

> *La maestra de Carmen va a regalar dulces el día del niño: en cada bolsa quiere meter dos bastones, tres caramelos y tres paletas.*
>
> *a) ¿Para cuántas bolsas le alcanzan los bastones?*
>
> --
>
> *b) ¿Y los caramelos?*
>
> --
>
> *c) ¿Y las paletas?*
>
> --
>
> *d) ¿De cuáles dulces sobraron?*
>
> --
>
> *e) ¿Cuántas bolsas van a tener los tres tipos de dulces?*
>
> --

Los maestros informaron lo siguiente:

> En el cuaderno de trabajo de los alumnos están dibujados 18 bastones, 15 caramelos y 25 paletas. A continuación mostramos una parte de lo que ocurre en la clase, en el momento en que trabajan con el material que la maestra les proporciona.
>
> De inmediato en cada uno de los equipos se reparten las cantidades [de dulces] pero cada quien se ponía a llenar bolsas.
>
> Un alumno mete en la bolsa caramelos, en otra bolsa, los bastones, en otra bolsa, paletas y, al último, revisa que estén diez (porque se le dieron a cada equipo diez bolsas).
>
> Otro equipo hace exactamente lo mismo, pero éste sí se percata de esa última pregunta, se dieron cuenta de que cada bolsa debería llevar de los tres dulces y empiezan a repartir; al terminar los caramelos siguen repartiendo los otros (los paletas los bastones), pero no contestaban la última pregunta todos los equipos.

Los planteamientos de las primeras tres preguntas orientan a los alumnos a buscar la cantidad de bolsas para cada tipo de dulces, dejando de lado la idea de incluir en ellas los tres tipos de dulces. Considerando que, además, el tipo de reparto solicitado en la lección es poco usual (y no sencillo de hacer), es bastante explicable que los alumnos interpretaran el problema como el reparto que ellos conocen. Así, es muy probable que el origen del error haya estado, en buena parte, en ciertas características de la tarea y en la manera en que fue planteada, aspectos que no fueron cuestionados en el informe.

3.2.2. Los aspectos conceptuales más complejos no se hacen visibles

Si bien antes mostramos que los maestros suelen valorar la heterogeneidad de los procedimientos de sus alumnos, también encontramos que varios maestros identifican y se sorprenden ante las distancias entre los procedimientos que ellos esperan y los que ponen en juego los alumnos. Un reto que permanece es considerar como posible causa del error la dificultad conceptual en juego. Veamos algunos ejemplos.

En el segundo plan de clase entregado, un maestro planteó un problema de reparto en un grupo de cuarto grado, de la siguiente manera:

Hoja de trabajo

Instrucciones: *Observen los repartos que realizaron y contesten las preguntas*

¿Cuándo se obtiene una parte mayor de chocolate para cada niño, cuando se reparten 4 chocolates entre 6 niños o cuando se reparten 2 chocolates entre 3 niños?

R: ____

¿Cuándo se obtiene una parte menor de chocolate para cada niño, cuando se reparten 4 chocolates entre 6 niños o cuando se reparten 2 chocolates entre 3 niños?

R: ____

¿Entonces qué es más 2/3 o 4/6?

R: ____

La tercera pregunta deja ver el supuesto de que los alumnos van a encontrar, al resolver las preguntas anteriores, las fracciones en cuestión expresadas de manera canónica: $^2/_3$ y $^4/_6$. La asesora, al comentar el plan de clase, advirtió a los maestros que era poco probable que los alumnos resolvieran de esa manera el problema y mostró otras soluciones posibles, menos sistemáticas. No obstante, fue la puesta en práctica de la actividad la que contradijo el supuesto del maestro; los retos fueron grandes y anteriores al uso de esas fracciones, por ejemplo, lograr hacer un reparto equitativo y exhaustivo entre 3 o entre 6. Solamente dos parejas de 12 hicieron la cuantificación esperada y ninguno vio la equivalencia. El maestro que hizo el registro tomó nota de este hecho, aunque él consideró que fue por falta de tiempo en el desarrollo de la clase y por problemas de redacción de las preguntas.

> No se logró el objetivo, ya que por falta de tiempo no fue posible inducir a los alumnos a los razonamientos necesarios para llegar a la conclusión de que las fracciones resultantes del reparto al representar la misma cantidad son llamadas equivalentes.
>
> [...] al parecer las preguntas estuvieron redactadas de forma inadecuada, ya que los niños se confundieron al dar respuesta a las dos primeras preguntas, consideraban que en el reparto donde eran menos niños, éstos recibían una parte mayor, sin tomar en cuenta que también eran menos barras...

En otras ocasiones los maestros también expresaron cierta sorpresa cuando los alumnos no utilizaban las técnicas que ellos esperaban, por ejemplo, ante un problema de división, como en el caso de la filas de 4 en 4, descrito anteriormente (apartado 3.1), muchos niños usaron sumas o multiplicaciones. Los procedimientos que surgen en estos casos, menos complejos y a veces erróneos, a menudo no habían sido anticipados en el plan de clase.

Un maestro de segundo de secundaria diseñó el siguiente problema para la clase de fracciones:

> *Se tienen tres mezclas con pintura negra y blanca:*
>
> *Mezcla 1: se mezclan 2* $^1/_2$ *litros de pintura negra y 10 litros de pintura blanca.*
> *Mezcla 2: se mezclan 1* $^1/_5$ *litros de pintura negra y 6 litros de pintura blanca.*

Mezcla 3: se mezclan 1 $^1/_2$ litros de pintura negra y 4 1/2 litros de pintura blanca.
En los recuadros de abajo escribe la razón que corresponde para cada mezcla de la forma n/b. En donde "n" significa litros de pintura negra y "b" significa litros de pintura blanca.

[...] Enseguida contesta las siguientes preguntas:
¿Cuál de las tres mezclas es más oscura?

¿Cómo lo sabes?

¿Cuál es la mezcla más clara?

Escribe una mezcla equivalente a la mezcla "1".

(Siguen dos preguntas más, de valor faltante)

En el registro –muy detallado–, el maestro dio cuenta de lo complejo que resultó el problema para los alumnos, aunque las dificultades se asociaron principalmente al uso de las operaciones:

Algunos equipos mostraban cierta ansiedad al no comprender bien y observábamos que presentaban mucha dificultad con las operaciones de fracciones [...] Algunas tablas que hicieron los equipos fueron las siguientes:

Hoja de Adriana

mezcla 1		mezcla 2		mezcla 3	
Negra	Blanca	Negra	Blanca	Negra	Blanca
2 $^1/_2$	10	1 $^1/_5$	6	1$^1/_2$	4$^1/_2$
5	20	3	12	3	9
$^7/_2$ *	30	4.45	18	4 $^1/_2$	13 $^1/_2$
				5	18

* Posiblemente el profesor anotó 7/2 en lugar de 7 1/2 al copiar el procedimiento.

> Pudimos detectar que al elaborar las conversiones de proporcionalidad en los cuadros, algunos equipos tuvieron errores, como en el caso de la mezcla 2; al multiplicar por dos 1 $^1/_5$ obtuvieron 3 erróneamente. Con la rapidez, tuvieron muchos problemas inclusive para transcribir los datos como [en] el primer cuadro, en lugar de poner 2 litros y medio de pintura negra pusieron 1 y medio,[5] igualmente, en la mezcla tres, sumaron erróneamente.
>
> Esta actividad resultó difícil de resolver para la mayoría de los alumnos: ellos tuvieron muchos problemas con las conversiones y las operaciones de fracciones y términos como equivalencia6

El maestro se dio perfecta cuenta de que la clase fue difícil para la mayoría de los alumnos y atribuyó esta dificultad a las conversiones, las operaciones con fracciones y la novedad del término equivalencia. Sin embargo, nos parece que esa causa, siendo cierta, no fue la principal. Y es que, en problemas como el anterior, no es fácil identificar qué características del problema lo hacen complejo: el contexto de mezclas, el uso de medidas fraccionarias, las magnitudes distintas, las relaciones internas[7] complejas que están en juego. En varios casos encontramos que las dificultades para resolver un problema se atribuyeron, más que a cuestiones inherentes al problema, a aspectos externos a las características de dicho problema, por ejemplo: el desinterés de los alumnos en una tarea se atribuyó a que ésta fue colectiva, sin cuestionar si era pertinente para ese grupo de alumnos; que hubiera estudiantes que no trabajaron en una actividad en equipo se atribuyó a una mala conducción del maestro sin preguntarse si la actividad en equipo demandaba trabajo de todos los miembros; abordar un problema de reparto proporcional como uno de reparto en partes iguales se explicó por el desconocimiento, por parte de los alumnos, del término "reparto justo", sin reparar en que el problema implicaba un tipo de reparto distinto del usual.

---

[5] Este error no aparece en la tabla que los maestros envían en el informe.

[6] El maestro también identificó algunas otras dificultades a las que dio menos peso, como la de dividir la cantidad de pintura blanca entre la de pintura negra y no saber cómo interpretar el cociente, o el que "no lograban ubicarse bien con la pregunta de las mezclas usando fracciones".

[7] Relaciones internas son las que se establecen entre dos cantidades de un mismo conjunto (o magnitud), por ejemplo, en la mezcla 1, entre 2.5 litros de pintura negra y 5 litros de la misma pintura. En este caso la relación interna es "el doble" o "la mitad". En muchos casos, estas relaciones son más accesibles que las externas, esto es, que las que se establecen entre cantidades que se corresponden de conjuntos distintos (Block, 2006).

3.2.3. Lo que se logra explicar está en función, en buena medida, de lo que se logra prever

La dificultad para identificar las causas de los errores de los alumnos ante una situación se manifestó en varias ocasiones desde el análisis previo de dicha situación. Veamos un ejemplo.

En la planeación de la clase que describimos anteriormente en la que se abordó un problema de mezclas de pintura blanca y negra, el maestro anticipó los siguientes posibles procedimientos y dificultades, así como las intervenciones en que haría frente a estas últimas:

- Posiblemente algunos equipos comparen las cantidades calculando el cociente entre ellas, es decir, dividiendo los litros de pintura negra entre los de pintura blanca en las tres mezclas.
- También es probable que para cada relación encuentren dos razones diferentes, se debe explicar el significado de cada una, por ejemplo, para la mezcla 1, $^{2.5}/_{10}$ o $^{10}/_{2.5}$; la primera representa la cantidad de pintura negra por cada litro de pintura blanca y la segunda la cantidad de pintura blanca por cada litro de pintura negra.
- Otra forma que pueden usar es calcular el tanto por ciento que representan las pinturas negras respecto a las blancas (25%, 20% y 33.3%).
- Algunos pueden encontrar la relación por medio de una regla de tres simple. Por cada litro de pintura negra, ¿cuántos de pintura blanca le corresponden?
- Posiblemente algunos equipos encuentren los litros de pintura blanca necesarios por cada litro de pintura negra mediante una tabla de equivalencias.

Mezcla 1		Mezcla 2		Mezcla 3	
Pintura negra (lt)	*Pintura blanca (lt)*	*Pintura negra (lt)*	*Pintura blanca (lt)*	*Pintura negra (lt)*	*Pintura blanca (lt)*
1	**4**	**1**	**5**	**1**	**3**
2.5	10	1.2	6	1.5	4.5
5	20	12	60	3	9

> Un error que pueden cometer los alumnos es el de restar en cada mezcla litros de pintura blanca menos litros de negra con los datos originales. Para este caso es importante hacer notar que no se está tomando la misma cantidad de litros de pintura negra en los tres casos, de manera que no es posible compararlos así.
>
> Dificultades: posiblemente al alumno no encuentre la manera correcta de saber cuál de las mezclas tiene más pintura negra, de esta manera se los puede orientar para que usen una tabla de equivalencias para cada mezcla y encuentren en dónde coinciden los litros de pintura negra para las tres tablas [...] (en el cierre de la sesión el maestro deberá comentar que si restan los litros de pintura negra con la blanca los resultados no serán correctos porque no se trata de una razón aritmética sino geométrica y ésta es por medio de un cociente).

El plan de clase muestra que el maestro anticipó procedimientos complejos: el cociente entre dos magnitudes distintas, el cálculo del porcentaje que representa una magnitud respecto a la otra, uso de la regla de tres. También contempló un procedimiento más accesible, el recurso a las relaciones internas para calcular el valor unitario, es decir, para calcular en cada mezcla la pintura blanca necesaria para 1 litro de pintura negra y así poder comparar. Cabe observar que los datos no facilitan este procedimiento, pues en los tres casos se necesita dividir entre decimales. Finalmente, si bien el maestro sabía que podía surgir un procedimiento aditivo erróneo, consideró que este error podría hacerse notar fácilmente, indicando que "no se trata de una razón aritmética sino geométrica".[8]

Como se vio, el problema resultó muy complejo para los alumnos. Los procedimientos anticipados en la planeación resultaron estar muy por encima de las posibilidades reales del grupo. Esta sobreestimación de lo que serían capaces de realizar los alumnos podría explicar la dificultad que tuvo el maestro después, cuando quiso identificar las características de la situación que pudieron ser causa de los errores (los cuales atribuyó a errores de cálculo, a la prisa, entre otros factores).

Este ejemplo permite destacar el importante papel que puede desempeñar el análisis previo de una situación, desde la planeación, para hacer posible no

[8] En efecto, la situación elegida no ofrece una manera de que los alumnos se den cuenta por sí mismos del error aditivo. Ésta es una desventaja del contexto "mezclas".

sólo la identificación de los errores, sino también sus posibles causas, así como las posibilidades reales de superarlos en el curso de la situación. Dicho análisis previo requeriría –ahora lo vemos con más claridad– la organización de una realimentación de lo planeado por cada maestro, no sólo individual, como se hizo, sino también colectiva, por parte de los asesores del taller.

Por otro lado, unas situaciones pueden ser más fecundas que otras desde el punto de vista de lo que su análisis previo puede aportar para la formación de los maestros. Por ello, probablemente sea conveniente que, al menos en algunos casos, la planeación comience con la elección de una situación por parte de los asesores y la organización de una discusión colectiva sobre los posibles efectos de las características de dicha situación en los procedimientos y errores de los estudiantes.

3.2.4. Un logro mayor: se identifican efectos de características diversas de la situación didáctica

Anteriormente mencionamos que en los problemas diseñados por los maestros en los planes de clase, fueron difíciles de identificar las características que los volvían complejos o que hacían emerger procedimientos distintos de los que se habían previsto o que hacían aparecer errores. Mostraremos ahora algunos ejemplos en los que los maestros sí reconocieron efectos de las características de la situación en las resoluciones de los estudiantes.

Dos maestros anticiparon desde el plan de clase que los alumnos podían considerar en sus resoluciones aspectos del contexto que no fueron tenidos en cuenta en el diseño de la situación didáctica. Veamos un ejemplo. Se trata de una situación de proporcionalidad en la que "bandas de ratones" toman bolsas de semillas y, para saber si hay equidad entre las bandas, se deben comparar las relaciones entre las cantidades de semillas y las cantidades de ratones de las diferentes bandas.[9] Los maestros dijeron:

> Se puede presentar el dilema de la justicia y la equidad en función de las características de las familias y de los ratones, por ejemplo: familias más o menos trabajadoras, o ratones más gordos o flacos, merecen cantidades distintas de semillas.

[9] Esta situación es una adaptación de actividad tomada de Comin (2002). Fue realizada en el taller.

Llama la atención esta observación, pues proviene de un equipo de maestros que solía hacer planes de clase e informes bastante austeros. En efecto, el peso del contexto en las respuestas de los alumnos no fue previsto por parte de los asesores.

En otros informes de clase, los maestros dieron cuenta de cuestiones que no se habían previsto al diseñar la clase, por ejemplo: señalaron que un alumno insistió en una respuesta errónea aun después de verificar con material; que el uso de tablas, pensado para comprobar, no fue claro para los alumnos; que el uso de la calculadora implicó obtener cocientes decimales difíciles de interpretar, o bien, que a los niños de un equipo "les pareció demasiado sencillo (el problema y) no les pareció un reto", pues hicieron comentarios como "el material, nuestro cerebro no lo ocupó".

Una de las funciones de las realimentaciones de los asesores fue analizar varios ejemplos similares para lograr destacar, generalizar y nombrar los fenómenos que los maestros ya empezaban a mirar, como el papel de las variables didácticas –el contexto del problema, los datos numéricos– del material, de los recursos de verificación o de la calculadora en la actividad de los alumnos. Esto puede ayudar también a que los maestros que dan por sentadas estas cuestiones empiecen a considerarlas como problemáticas.

3.3. Las cuestiones ajenas al contenido matemático

Con frecuencia, sobre todo al principio, ocurrió que a los maestros les interesaron, además de cuestiones que tienen que ver con el contenido, otras como la disciplina, las cuestiones afectivas, el género, la organización del grupo, las resistencias de algunos alumnos para trabajar en equipo, la necesidad e intención de los maestros de considerar las intervenciones de todos los alumnos, o la tolerancia y reconocimiento de los errores al resolver un problema. Estas cuestiones muestran la complejidad de los fenómenos que ocurren en la clase y que, en algunos casos, se privilegian sobre otras vinculadas al contenido.

La petición de centrar la mirada en los aspectos vinculados con el contenido puede implicar hacer un recorte de la complejidad de la clase, al dejar de lado aspectos que también son importantes para los maestros. El reto entonces, desde la formación, está en pensar maneras de destacar que los análisis de la situación en sí misma, de los procedimientos que propicia, de las formas de validación[10] de los resultados, también pueden ayudar a explicar algunas cuestiones que preocupan a los docentes y que las identifican como ajenas a lo didáctico, como la falta de interés por parte de los alumnos o el desorden en la clase.[11]

4. A MODO DE CONCLUSIÓN: REFLEXIONES SOBRE LA ESTRATEGIA

Esta experiencia nos ha ayudado a comprender que, en efecto, la observación y el análisis de las prácticas de enseñanza pueden ser recursos valiosos para la formación docente, como lo señalan Margolinas, Coulange y Bessot (2005), pero también que es necesario que se den ciertas condiciones de las que probablemente todavía sabemos poco. Cerraremos el presente artículo con una reflexión crítica sobre las estrategias que pusimos en juego, con la intención de aportar al conocimiento de dichas condiciones.

4.1. El análisis de los propios registros: del plano privado a la discusión colectiva

En las discusiones colectivas sobre los planes y registros de clase, identificamos el doble filo de estas herramientas: por un lado, abren la posibilidad de mirar con cierta profundidad la propia práctica, pero por otro, se arriesga la legitimidad de los maestros al pasar la práctica al plano de lo público. Si bien en reiteradas ocasiones los maestros manifestaron explícitamente haber aprendido de los análisis colectivos de los planes y registros de clase, también fue notorio, desde la misma elaboración de los textos, lo difícil que resultó exponer ante sus compañeros –a veces colegas, a veces jefes, a veces subordinados– algo que se considera parte del territorio privado.

La dificultad para exponer la propia práctica se expresa también en informes que hablan poco de los errores y dificultades de los alumnos, probablemente

[10] Nos referimos a las formas que se ofrecen a los alumnos para que averigüen si sus resultados y procedimientos son correctos o no.

[11] Cabe señalar que el interés de los maestros por informar cuestiones tan diversificadas puede estar relacionado también con las numerosas demandas de los distintos proyectos de formación que les exigen atender asuntos tan diversos como la equidad de género, la convivencia, la actitud hacia las matemáticas, el amor hacia los alumnos, la didáctica de cada uno de los contenidos de las distintas materias, la heterogeneidad de los estudiantes, etcétera.

porque esos errores no se hicieron muy visibles en la propia clase, o incluso por la elección de situaciones sencillas para evitarlos. Si bien esto fue objeto de discusión en el segundo taller presencial, a partir del cual los registros de algunos maestros informaron más dificultades en el desarrollo de la clase, parece estar muy presente la idea de que una decisión didáctica se sostiene solamente si no surgen escollos durante ella. Es decir, la posibilidad de hacer análisis fecundos implica que se reconozcan y documenten las dificultades, pero esto a su vez implica aceptar estas dificultades y comprender que lo que pone de manifiesto, más que deficiencias personales, son problemáticas didácticas compartidas.

Parece entonces importante cuidar qué se analiza y en qué momento; empezar, por ejemplo, con los conocimientos que los niños manifiestan en sus resoluciones, la posible evolución de sus procedimientos y sólo después de un tiempo razonable, analizar la gestión del maestro.

4.2. La planeación y la elaboración de registros requieren una mirada informada

La tarea de hacer planes y registros de clase tenía el propósito de ayudar a los maestros a mirar cada vez con más profundidad lo que ocurre en las clases. Esto se logró en parte con la realimentación de los asesores y los análisis colectivos. No obstante, la misma elaboración de planes y registros requiere ya una manera de mirar que los asesores delegamos en los maestros. Veamos tres ejemplos: *a)* la clase no siempre se diseñó pensando detalladamente en la actividad de los alumnos, es decir, la selección del problema que se planteó a los alumnos no siempre implicó una anticipación cuidadosa de los posibles procedimientos, errores, etc.; *b)* en algunos registros hubo una buena documentación de procedimientos, pero éstos no fueron interpretados (¡y no era fácil hacerlo!), y *c)* las situaciones que se elegían no siempre permitían observar con claridad lo que nos interesaba, por ejemplo, a menudo dichas situaciones ofrecieron escasos recursos de verificación de los resultados y procedimientos, cuestión que por lo tanto fue escasamente observada en los registros. Esto parece ser una consecuencia de no haber problematizado bastante la noción de validación en las sesiones presenciales.

En resumen, la propia elaboración de planes y registros, antes de nuestra realimentación y del análisis colectivo, requiere aprendizajes que no se pueden delegar completamente en los maestros. Podría ser entonces útil hacer un ejercicio de análisis previo durante la sesión presencial para ayudar a que los maestros planeen y observen la clase ya pensando en algunos asuntos específicos que les interese probar o analizar.

4.3. La realimentación de los asesores

Si bien podemos decir poco acerca de la manera en que los maestros recibían los comentarios de los asesores,[12] consideramos que el énfasis en los contenidos y en su didáctica sí representa una opción pertinente. No es fácil mirar la relación entre las características de una situación y la actividad de los alumnos, que se expresa a través de los distintos procedimientos para resolver cierto tipo de problemas, como las posibles trayectorias de evolución de dichos procedimientos, los efectos de las variables didácticas sobre las maneras de resolver y sobre los errores, las formas de validación, y ayuda incluso a explicar, al menos parcialmente, cuestiones que a los maestros les interesan y que consideran ajenas a la situación didáctica, tales como el desorden en clase, la intención de incluir a todos los alumnos, la posibilidad de trabajar en equipo, la manera de asumir los errores, entre otros.

No obstante, consideramos que la variedad de aspectos de las planeaciones y registros de los maestros sobre los que se enfocaron los comentarios de los asesores fue excesiva: se demandaba atender con detalle cuestiones tan distintas como la consigna o las formas de validación, a la par de una anticipación cuidadosa de la actividad que realizarían los alumnos y las intervenciones del docente en función de dicha actividad. Definitivamente, la exigencia era muy difícil de atender. Sin duda, una manera de salvar esta dificultad tiene que ver con una recomendación, hecha con anterioridad, de elegir, desde la elaboración del plan de clase pero también en la del registro y los comentarios, algunas cuestiones muy específicas –aunque otras tengan que ser ignoradas por el momento– para poder analizarlas con detenimiento. Asimismo, puede ser conveniente, sobre todo al principio, acercar lo más posible los aspectos tratados a aquello que los maestros ya han empezado a observar.

[12] Hace falta diseñar un mecanismo que permita a los asesores identificar más cuidadosamente en qué casos dichos comentarios significaron aportes importantes para los maestros, o bien fueron demasiado lejanos de lo que ellos estaban mirando.

4.4. Un curso amplio, centrado en la didáctica del contenido y vinculado a la práctica: buenas condiciones para la actualización

La política oficial reciente[13] para la actualización de maestros ha propiciado una proliferación de cursos breves sobre una gran diversidad de temas cuya pertinencia muchas veces no es lo bastante clara. En este contexto, consideramos importante destacar que, para el desarrollo del curso que aquí hemos comentado, se contó con condiciones excepcionalmente buenas, tales como una duración suficiente, de casi un año escolar, lo cual se facilitó por la posibilidad de combinar sesiones presenciales con trabajo a distancia; un grupo estable de maestros, varios de ellos dedicados a la formación, y una temática vinculada directamente con la enseñanza escolar: la didáctica de una disciplina específica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.) (1995), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ball, D.L. y H. Bass (2000), "Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics", en J. Boaler (ed.), *Multiple Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematics*, Westport, CT, Ablex, pp. 83-104.

Block, D. (2006), "Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón 'múltiplo' y su vinculación con la multiplicación de números naturales", *Educación Matemática,* vol. 18, núm. 2, pp. 5-36.

Block, D., A. Moscoso, M. Ramírez y D. Solares (2007), "La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. XII, núm. 33, pp. 263-294.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Comin, E. (2002), "L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núm. 2-3, pp. 135-182.

Godino, J., C. Batanero y P. Flores (1998), "El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profersores de matemáticas",

[13] Nos referimos sobre todo a la implementada en México entre 2006 y 2012.

Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Hersant, M. y M. J. Perrin-Glorian (2005), "Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 59, núm. 1-3, pp. 113-151.

Houdement, C. y A. Kuzniak (1996), "Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques", *Recherches en didactique des mathematiques*, vol. 16, núm. 3, p. 301.

Lerner, D. (2001), *Leer y escribir en la escuela: lo real, lo posible y lo necesario*, México, Fondo de Cultura Económica.

Margolinas, C. y M. J. Perrin-Glorian (1997), "Des recherches visant à modéliser le rôle de l´enseignant", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 17, núm. 3, pp. 7-15.

Margolinas, C., L. Coulange y A. Bessot (2005), "What Can the Teacher Learn in the Classroom?", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 59, núm. 1-3, pp. 205-234.

Perrin-Glorian, M. J., L. Deblois y A. Robert (2008), "Individual Practising Mathematics Teachers. Studies on Their Professional Growth", en K. Krainer y T. Wood, *Participants in Mathematics Teacher Education*, Sense, pp. 35-59.

Secretaría de Educación Pública (2009), *Matemáticas 1. Cuaderno de Trabajo para el alumno. Primer grado*, México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, SEP.

Schulman, L. (1986), "Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching", *Educational Researcher*, vol. 15, núm. 2, pp. 4-14.

DATOS DE LOS AUTORES

David Block
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
dblock@cinvestav.mx

Patricia Martínez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
mfalcon@unam.mx

Tatiana Mendoza
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
tataniux47@hotmail.com

Margarita Ramírez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
mramirezba@yahoo.com.mx

Anexo 1 Secuencia de las actividades entre sesiones presenciales

Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6	Semana 7	Semana 8
Sesión presencial 1	Maestros hacen y envían planeación a asesores	Asesores revisan y devuelven comentarios	Maestros hacen ajustes a la planeación	Maestros realizan actividad, hacen el informe y lo envían	Asesores revisan informes y preparan sesión 2	Sesión presencial 2	Se reinicia el proceso

Anexo 2 Temas de las sesiones de análisis de los planes e informes de clase

Sesión	Tema	Descripción
2	El uso del material concreto	Se analizaron dos ejemplos en los que el material se usa de distinta manera, en un caso es para verificar, en el otro, para resolver. Se destacó la manera en que la primera modalidad da lugar a un trabajo más interesante por parte de los alumnos.
	La consigna.	Se mostraron ejemplos de consigna que, involuntariamente, al mismo tiempo que se da la instrucción de la tarea, se dice cómo resolverla.
	¿Que nadie se equivoque?	En los informes de clase que los maestros entregaron en esta primera ocasión, las resoluciones de los alumnos no contenían errores. Se mostraron algunos ejemplos y se invitó a los maestros a analizar las causas.
3	Conocimientos de los niños sobre las fracciones	Se invitó a los maestros a reconstruir los procedimientos que pudieron haber realizado algunos alumnos a partir de las representaciones que dejaron en su hoja; se analizó el efecto de algunas variables y se analizaron errores de los alumnos.
	Las intervenciones del maestro durante la resolución de un problema	Se destacó y valoró un conjunto de intervenciones de uno de los maestros participantes, interesante desde varios puntos de vista: sugerir un procedimiento específico, devolución de una pregunta con un contraejemplo, quitar dificultad a un problema, proponer analogías.
	Características de una situación interesante que resultó difícil.	Se compararon dos problemas destacando características que hicieron que uno fuera más complejo que el otro: los contextos (mezclas y escala); el tipo de números (enteros y fraccionaros); el tipo de razones (enteras, fraccionarias), entre otros.
4	Evolución de procedimientos	Se compararon procedimientos para resolver un problema poco común de división, destacando los recursos que los alumnos ponen en juego.
	Dificultades de los procedimientos o dificultades en los problemas	Se analizaron dificultades que tuvieron alumnos para resolver un problema cuya consigna resultó ambigua.

Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental

A Gabrielle Frisch D'Adhemar
In Memoriam

Jesús Gallardo Romero, José Luis González Marí y Verónica Aurora Quintanilla Batallanos

Resumen: Presentamos progresos en la configuración de un modelo en desarrollo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. Dicho modelo conecta las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas mediante una propuesta integradora que ofrece una vía operativa para transitar desde la actividad del estudiante hasta su comprensión matemática. Los principios que conforman el modelo se organizan en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La primera incluye un método para la identificación y organización de tareas con las cuales registrar la actividad matemática del estudiante. La segunda incorpora un recorrido interpretativo que permite el acceso a la comprensión del alumno en términos de usos dados al conocimiento matemático. La operatividad del modelo se exhibe con evidencias obtenidas al interpretar la comprensión de una pareja de estudiantes de secundaria que resuelven una tarea de cálculo aritmético elemental.

Palabras clave: interpretación, comprensión en matemáticas, análisis epistemológico y fenomenológico, hermenéutica, algoritmo de la multiplicación.

Abstract: We show the advances obtained in the configuration of a developing model for the interpretation of mathematics understanding. Such a model links

Fecha de recepción: 8 de julio de 2012; fecha de aceptación: 27 de junio de 2013.

the cognitive approach of mathematics interpretation with the semiotic approach through a process of integration, which shows an operative way to move from the students' activity to their mathematical understanding. The fundamental principles which define this model are divided in two dimensions, the phenomenon-epistemological and the hermeneutical. The first one includes a method for the identification and organization of task with which the mathematical activity of the students can be registered. The second one comprises an interpretative plan which grants the access to the students' understanding in terms of the given uses to the mathematical knowledge. The effectiveness of this model can be proved with some evidences obtained when interpreting a pair of secondary students when they solve an elementary arithmetic problem.

Keywords: interpretation, understanding in mathematics, phenomenological and epistemological analysis, hermeneutics, multiplication algorithm.

1. INTRODUCCIÓN

Un objetivo en educación matemática es garantizar que los alumnos aprendan matemáticas con comprensión. Hace décadas que la comprensión viene contemplándose como un objeto de investigación en el área (Kieran, 1994). En los últimos años, la creciente especialización en el tema ha motivado la proliferación de diferentes aproximaciones a la comprensión en matemáticas, con marcos teóricos y métodos de valoración específicos. En la mayoría de estas aproximaciones se llega a reconocer la naturaleza interpretativa de la valoración de la comprensión. Es decir, toda observación sobre el quehacer matemático de los alumnos, realizada con el fin de extraer información sobre su comprensión, ha de ser interpretada por quien efectúa la observación (Morgan y Watson, 2002). Es así como el objetivo básico de desarrollar la comprensión de los escolares queda ligado de manera ineludible a la actividad de interpretar sus acciones matemáticas en el aula. Una circunstancia que nos permite situar la *interpretación* en la base de las cuestiones que atañen al estudio de la comprensión en matemáticas.

La interpretación de la actividad matemática nos enfrenta al desafío de encontrar métodos eficaces con los que aproximarnos a la comprensión de los alumnos. La principal dificultad operativa reside en cómo transitar desde las acciones y registros matemáticos del estudiante hasta la delimitación de una buena aproximación a la situación real de su comprensión. En términos interrogativos: ¿cómo podemos interpretar la comprensión de los estudiantes a partir de su actividad matemática observable? Esta cuestión básica, que motiva el estudio que aquí se presenta, genera a su vez interrogantes concretos sobre diversos aspectos particulares de la interpretación, entre los que se encuentran los relativos a la naturaleza de las situaciones matemáticas que se van a emplear, los fragmentos que revelan la comprensión a partir de la actividad matemática registrada y la caracterización de los usos del conocimiento matemático y la comprensión de los estudiantes sobre la base de esos rastros visibles.

Como contribución específica a esta problemática, presentamos un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. La propuesta aspira a mediar en el dualismo entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas, ofreciendo como alternativa una visión interpretativa integradora. Buscamos presentar la interpretación desde una perspectiva más inclusiva, donde el objetivo es compartir formas de ver y comprender las matemáticas antes que insistir en una versión correcta de las matemáticas y una supuesta buena comprensión (Brown, 2008). Los referentes que configuran el modelo de interpretación se exponen organizados en dos dimensiones, una fenómeno-epistemológica y otra hermenéutica. La primera reúne los principios en torno al conocimiento matemático y a la comprensión en matemáticas y su valoración. También incluye una propuesta de análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático que posibilita la identificación y organización de tareas y la elaboración de instrumentos propicios para registrar la actividad matemática del estudiante. Las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al conocimiento matemático se proponen como referencia objetiva para caracterizar el uso del conocimiento en la actividad matemática. Con estos referentes, dirigimos la atención hacia el propio proceso de interpretación, incorporando en el modelo una segunda dimensión hermenéutica. Esta dimensión introduce un ciclo interpretativo que nos posibilita el acceso a la comprensión de los estudiantes en términos del uso que ellos hacen del conocimiento matemático.

2. ANTECEDENTES SOBRE INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

Uno de los aspectos concretos por los que se ve afectado el estudio de la comprensión en matemáticas es la naturaleza interpretativa de la valoración. Es usual que las diferentes aproximaciones incluyan entre sus principios generales referencias acerca de cómo hacer frente a la interpretación. Identificamos dos orientaciones básicas en la consideración y el tratamiento de la interpretación de la comprensión en educación matemática.

2.1. Orientación cognitiva

Esta orientación pone la atención en la subjetividad del alumno y determina como propósito responder a algunas de sus complejidades internas. Se caracteriza por concebir la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y por reconocer la posibilidad de su acceso y captación en las mentes de los alumnos. La interpretación se presenta entonces como un traslado hacia la esfera mental del estudiante, a la que pertenece su comprensión matemática, tomando como vía las distintas manifestaciones observables generadas durante su quehacer matemático (Duffin y Simpson, 2000).

En esta orientación, interpretar supone el acceso a realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas. Por tratarse la comprensión de una actividad que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observada directamente, su interpretación desde esta perspectiva necesita y suele abordarse al amparo de supuestos teóricos sobre la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo visible. El proceso metodológico recurrente implicado en esta interpretación tiene por objeto estrechar progresivamente la distancia entre estas realidades interna y externa. Un exponente de esta orientación es el *enfoque representacional*, que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Goldin, 2002; Hiebert y Carpenter, 1992). El acceso interpretativo al ámbito mental de la comprensión resulta especialmente directo en este enfoque, al plantear la valoración en función de las conexiones mentales que se establecen entre las diversas representaciones internas del conocimiento matemático objeto de comprensión (Rico, 2009). Las principales dificultades operativas por las que se ve afectada la orientación cognitiva de la interpretación están relacionadas con la transición entre los ámbitos externo e interno de la comprensión junto con los propios rasgos mentales de ésta.

2.2. Orientación semiótica

Esta opción interpretativa emerge de aproximaciones semióticas al conocimiento matemático y su cognición que se vienen desarrollando recientemente en educación matemática. La orientación semiótica, tal como la derivamos de estos enfoques, asume un distanciamiento con el carácter mental de la comprensión (Dörfler, 2006). Se opta por presentar la comprensión como una capacidad esencial o competencia del alumno que se traduce en prácticas sociales interpretables públicamente (Font, Godino y D'Amore, 2007). La interpretación se circunscribe al espacio exclusivo de la actividad matemática visible y del uso que en ella se hace de los sistemas de signos matemáticos. Interpretar supone trasladarse a los entornos semióticos generados por estas prácticas y producciones matemáticas observables, suspendiendo incluso cualquier referencia a la realidad externa que circunda a los propios productos semióticos. El método involucrado en esta interpretación se ajusta, en lo fundamental, a un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística que tiene como objeto captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en las diversas acciones matemáticas observadas y registradas en los alumnos. Ejemplo de ello lo encontramos en el análisis semiótico incluido en el *enfoque ontosemiótico* de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Las posibles fronteras de la orientación semiótica de la interpretación las situamos en la problemática relación entre el signo hablado y el signo escrito y en la suspensión de las referencias externas sobre las que se proyectan los registros semióticos.

2.3. El dualismo cognitivo-semiótico y su dilema metodológico

Las particularidades de las orientaciones señaladas quedan reflejadas en aspectos como el estatus asignado a la comprensión en matemáticas, el espacio de acceso delimitado para la interpretación, el método asociado, la terminología específica o las fronteras de su operatividad. La confrontación de ambas orientaciones con base en estos aspectos nos permite identificar las dicotomías del cuadro 1. En ellas nos apoyamos para conjeturar la presencia de un dualismo epistemológico en la interpretación de la comprensión en educación matemática: mientras que la orientación cognitiva pone el acento en *quien se pronuncia en el texto* (recreación mental del sujeto), la orientación semiótica dirige la atención hacia *lo que dice el texto* (aprehensión de su sentido).

Cuadro 1 Dualidades entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas

Rasgos dicotómicos	Orientación cognitiva	Orientación semiótica
Estatus de la comprensión	*Epistemológico:* fenómeno cognitivo, proceso mental, modo de conocer.	*Ontológico:* cualidad intrínseca, capacidad esencial del individuo.
Espacio de interpretación	Traslado a las realidades cognitivas internas del sujeto.	Traslado a los entornos semióticos generados por la actividad matemática.
Vía de acceso interpretativo	Observación de realizaciones externas objetivadas en registros verbales y escritos.	Práctica matemática visible y uso en ella de los sistemas de signos matemáticos.
Propósito de la interpretación	Estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.	Captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en la producción matemática.
Método	Círculo interpretativo con base en modelos de comprensión conjeturados *a priori*.	Modelo de *análisis estructural* de inspiración lingüística.
Fronteras	Transición entre lo *interno* y lo *externo;* los propios rasgos mentales de la comprensión.	Transición entre lo *hablado* y lo *escrito*. Suspensión de la referencia externa de los registros semióticos.

Al tiempo que reconocemos la legitimidad y potencialidad de estas dos orientaciones interpretativas para la investigación ligada a la comprensión (Tahta, 1996), también subrayamos el dilema metodológico que puede surgir al contemplar las orientaciones cognitiva y semiótica como polos de una relación de exclusión que nos impone una necesaria elección entre ellas. Como alternativa, se pueden establecer vínculos dialécticos entre ambas posiciones por medio de una visión extendida de la interpretación, donde las dos orientaciones contribuyen a la misma propuesta interpretativa, complementándose mutuamente. Ésta es la propuesta que fundamenta el modelo que se describe en la siguiente sección.

3. FUNDAMENTOS PARA UNA INTERPRETACIÓN OPERATIVA DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

Los principios que sustentan el modelo que proponemos para la interpretación de la comprensión en matemáticas se organizan en dos dimensiones, una *fenómeno-epistemológica* y otra *hermenéutica*. Estas dimensiones establecen pautas metodológicas operativas para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes a partir de la observación y del análisis de una actividad matemática planificada.

3.1. Dimensión fenómeno-epistemológica

La configuración de nuestro modelo parte de un doble reconocimiento: *a)* la imposibilidad de tener acceso de manera directa a la comprensión matemática de los estudiantes y *b)* el papel relevante que desempeña el uso del conocimiento matemático en la valoración de la comprensión de los alumnos. Estos dos supuestos demandan la necesidad de emplear estrategias de acercamiento indirecto a la comprensión, centradas en sus manifestaciones externas observables y en las particularidades del conocimiento matemático. La dimensión fenómeno-epistemológica atiende este reclamo proponiendo unos referentes teórico-metodológicos operativos sobre el conocimiento matemático y sobre la comprensión en matemáticas y su valoración. De estos principios derivamos a su vez un procedimiento para la identificación y organización de tareas con las cuales registrar e interpretar la actividad matemática del estudiante, basado en el análisis fenomenológico y epistemológico del propio conocimiento matemático.

3.1.1. *El conocimiento matemático como objeto de comprensión*

Nos interesa contemplar el conocimiento matemático desde la perspectiva del alumno que aspira a comprenderlo. Como tal objeto de comprensión, es considerado en nuestro enfoque como una entidad concreta de referencia con dos estructuras básicas específicas y exclusivas que delimitan su naturaleza y existencia. Estas estructuras surgen de las relaciones con otros conocimientos matemáticos (estructura epistemológica) y de las situaciones y tareas problemáticas que dan sentido al propio conocimiento (estructura fenomenológica), quedando de antemano constituidas con fines valorativos al margen del sujeto con pretensiones de comprensión.

3.1.2. *La comprensión y su valoración en matemáticas*

Consideramos que la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento. En este sentido, los estudiantes manifiestan una cierta comprensión en relación con un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo que deciden voluntariamente abordar, elaboran y emiten a su satisfacción respuestas adaptadas donde hacen un uso significativo (esto es, libre, consciente e intencional) de este conocimiento. Entendemos que el uso del conocimiento matemático por parte de un alumno, como forma de acción observable e interpretable, da cuenta de su comprensión. Por ello afirmamos que un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico. Nos apoyamos en el supuesto valorativo de que lo que un individuo utiliza, y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende.

Así pues, la comprensión en matemáticas la concebimos como una actividad intelectual que capacita al individuo para elaborar respuestas observables, adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización registrable e interpretable del conocimiento matemático en alguna de las categorías y formas posibles de su dimensión fenómeno-epistemológica. El aprendizaje surge como consecuencia de esta comprensión ligada a la funcionalidad del conocimiento matemático, por lo que la idoneidad del aprendizaje y su valor como objetivo en educación matemática quedan vinculados con la cuestión de la comprensión (Llewellyn, 2012).

3.1.3. Método para determinar situaciones problemáticas

La visión adoptada sobre la comprensión y su valoración requiere procedimientos para la identificación y selección de tareas problemáticas para plantear a los estudiantes, vinculadas al conocimiento matemático y generadoras de experiencias matemáticas observables. La estrategia sugerida por nuestro enfoque propone determinar situaciones que sean representativas de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático y con potencialidad para hacer emerger distintos usos de éste durante la resolución. Ambas condiciones son necesarias para garantizar la utilidad de esas situaciones como instrumento operativo en la valoración de la comprensión. De manera específica, las fases del método son:

Primera fase. Destinada a concretar un conjunto amplio de situaciones que tienen en común la posible intervención de dicho conocimiento en su resolución. La configuración de este conjunto queda garantizada mediante la consulta y revisión de distintas fuentes documentales (investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático, libros de texto de matemáticas, obras de formación didáctica y manuales de matemáticas, entre otros).

Segunda fase. Análisis relacional del conjunto de situaciones obtenido en la fase anterior que conduce a la descripción teórica de la estructura fenómeno-epistemológica correspondiente al conocimiento matemático dado. Esta estructura, a su vez, es la referencia empleada para la selección del pretendido conjunto reducido de situaciones representativas de cada categoría y pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión de acuerdo con nuestro modelo.

3.2. Dimensión hermenéutica

La dimensión fenómeno-epistemológica no responde por sí sola a algunas cuestiones relacionadas con la propia interpretación, como son las referentes a la identificación de rastros de comprensión matemática en el registro escrito y a la caracterización de los usos del conocimiento matemático a partir de esos rastros: ¿cómo identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática del estudiante los rastros de su comprensión que pueden considerarse indicadores de algún uso dado al conocimiento matemático?

Instruidos en la dialéctica inspirada por la teoría del texto de Ricœur (2002), optamos por una actitud integradora frente al dualismo cognitivo-semiótico de la interpretación de la comprensión en matemáticas e introducimos en nuestro modelo una visión extendida de la interpretación donde las dos orientaciones intervienen en fases diferentes de la propuesta interpretativa. El ciclo arranca en el plano cognitivo con el reconocimiento de la comprensión matemática como fenómeno mental, irrumpe en el ámbito semiótico con el análisis de la actividad matemática del estudiante y desemboca en una superación fenómeno-epistemológica que nos permite retornar de nuevo a la comprensión del alumno a través de los usos dados al conocimiento matemático. A continuación, delineamos los supuestos que definen este ciclo interpretativo (figura 1).

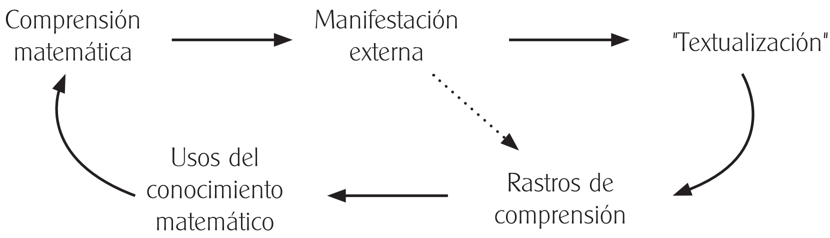
1. La comprensión es una actividad intelectual cognitiva experimentada como tal exclusivamente por quien la desarrolla.

   Toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, una actividad intelectual de carácter mental. La comprensión, tanto en su versión epistemológica, como modo de conocimiento, como en su variante ontológica, como capacidad esencial del sujeto, va a demandar unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla.
2. La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables.

   Los fenómenos cognitivos no son radicalmente incomunicables y la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. Con base en esto, el *registro* observable generado durante el quehacer matemático se erige como la principal fuente depositaria de las expresiones o *rastros* visibles derivados de la comprensión, constituyéndose por ello en el centro de interés de nuestra propuesta interpretativa.
3. La circunscripción al registro observable, más que limitación, es una condición necesaria para la interpretación.

   Una interpretación dirigida a la faceta mental de la comprensión induce a que la transición entre lo externo y lo interno resulte inevitablemente

Figura 1 Ciclo interpretativo de la comprensión en matemáticas



problemática desde el principio y suponga una limitación metodológica importante para esta vía. Proponemos una opción interpretativa distanciada provisionalmente del interés por lo mental y restringida al registro observable, lo cual permite justificar la interpretación como un requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la propia comprensión.

4. La interpretación demanda la textualización de todo registro observable.

El carácter contingente, temporal y dependiente de las acciones y las manifestaciones verbales constituye un obstáculo a la interpretación en sus distintas variantes. Por el contrario, la estabilidad, perdurabilidad e independencia del *registro escrito* lo hacen especialmente idóneo para desplegar en él nuestra propuesta. El paso de lo hablado a lo escrito, lejos de ser una limitación metodológica, se presenta como otra de las condiciones necesarias para la tarea interpretativa.

5. La interpretación persigue identificar los rastros de comprensión diseminados en el registro escrito y caracterizar a partir de ellos los usos del conocimiento matemático.

Aunque la comprensión y la interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo semiótico. El hecho de que la capacidad para utilizar el conocimiento matemático dependa en buena medida de su comprensión nos obliga a situar la referencia última de la comprensión del estudiante, no ya en el registro escrito, sino en el uso del conocimiento matemático que deja entrever.

3.3. La interpretación en la práctica: pautas metodológicas

El agente intérprete debe enfrentar distintos requerimientos metodológicos a la hora de aplicar el procedimiento para la interpretación de la comprensión que se desprende de nuestro enfoque. En un primer momento, previo al episodio de interpretación, la dimensión fenómeno-epistemológica sugiere las siguientes acciones: *a)* realización de un análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático; *b)* identificación de los elementos fenómeno-epistemológicos de éste que influyen en el nivel cognitivo y son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los alumnos en términos de comprensión; *c)* organización y selección de las situaciones y tareas matemáticas que dan sentido al conocimiento matemático con base en el resultado de los análisis previos; y *d)* garantía de que los estudiantes se enfrenten a situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica del conocimiento matemático.

A continuación, la dimensión hermenéutica propone, tras el desarrollo del episodio de interpretación, una estrategia combinada consistente en: *e)* interpretar la comprensión de los escolares en términos de capacidad para enfrentar con éxito las situaciones planteadas; *f)* identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito; y *g)* revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático, empleando para ello la propia estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento como referencia objetiva con la cual certificar tales usos.

4. INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Con el propósito de mostrar la operatividad de nuestra propuesta, describimos los pormenores de su aplicación en un caso: la interpretación de la comprensión de una pareja de estudiantes de secundaria enfrentada a la resolución de una tarea vinculada al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

4.1. Selección de la tarea matemática

En Gallardo y González (2006), relatábamos la aplicación de la dimensión fenómeno-epistemológica sobre el algoritmo estándar de la multiplicación. Se determinó una estructura con tres categorías epistemológicas (*técnica*, *analítica* y *formal*) y dos fenomenológicas (*situaciones exclusivas* y *situaciones no exclusivas*) para las distintas tareas vinculadas al algoritmo. En la experiencia empírica de ahora, hacemos uso de esta estructura y planteamos a los alumnos una *situación exclusiva de uso formal* (figura 2) donde:

- El empleo del algoritmo estándar se manifiesta como la principal opción, evidente y necesaria, para la resolución de la tarea (exclusividad frente a otros conocimientos matemáticos). El estudio de las variantes para calcular 23×32 sólo es factible si previamente el estudiante ha tenido experiencias previas con el algoritmo estándar, que ahora se toma como referencia en la reflexión.
- Se precisa el uso de las *relaciones internas* que sustentan y validan el mecanismo subyacente en el algoritmo estándar. La justificación matemática de las tres variantes del cálculo 23×32 la proporcionan los mismos principios básicos que fundamentan el algoritmo (sistema

Figura 2 Situación exclusiva de uso formal del algoritmo estándar de la multiplicación

Observa las siguientes variantes utilizadas para calcular 23×32:

Primera variante	*Segunda variante*	*Tercera variante*
23 ×	23 ×	23 ×
32	32	32
69	64	96
46	96	64
736	736	736

Pregunta 1: ¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso?
Pregunta 2: ¿Consideras estos procedimientos válidos o no? ¿Por qué?
Pregunta 3: ¿Qué razones matemáticas darías para justificar lo adecuado o inadecuado de estos métodos para multiplicar?

de numeración decimal posicional, propiedad distributiva del producto respecto de la suma y propiedad conmutativa).

Aunque en el plano fenómeno-epistemológico la tarea exija el uso *formal* del algoritmo, es posible que los alumnos hagan uso de las facetas *técnica* y *analítica* de este, *a priori* más próximas a sus experiencias previas con el método de cálculo. A diferencia del ámbito formal del algoritmo, las facetas técnica y analítica se centran más en las *relaciones externas* entre las componentes de la secuencia algorítmica:

- El empleo técnico se limita al establecimiento de las relaciones externas *usuales* entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer el procedimiento establecido en el sentido apropiado. Es el tradicional empleo mecánico o rutinario como instrumento de cálculo.
- El empleo analítico exige el análisis premeditado de la estructura y el funcionamiento externos del algoritmo, lo que conlleva el dominio de las relaciones *no usuales* que permiten recorrer la secuencia algorítmica en sentidos distintos al usual.

4.2. Configuración del escenario de interpretación

El episodio de interpretación transcurre sobre el escenario constituido por una profesora que pretende obtener información sobre la comprensión de dos alumnos inmersos en la resolución conjunta de una actividad matemática concreta. El episodio en cuestión tuvo lugar en un colegio de Cusco, Perú. Participaron Mayte (M) y Ráez (R), alumnos de quinto curso de secundaria (16-17 años). En su aula convencional y en un ambiente de trabajo usual, estos alumnos se enfrentaron conjuntamente a la tarea matemática descrita en el apartado anterior mientras el resto de compañeros desempeñaba actividades paralelas. Su profesora habitual, también autora del artículo, les presentó la tarea por escrito, les leyó el enunciado en voz alta y se limitó a indicarles la posibilidad de anotar y debatir entre ellos lo que consideraran oportuno sin límite de tiempo. Sin la intervención directa de la profesora, la discusión es dirigida por las propias preguntas planteadas en la tarea matemática. El episodio tuvo una duración aproximada de 13 minutos y 30 segundos y fue registrado en vídeo.

4.3. Rastros de comprensión

Como resultado del análisis realizado sobre fragmentos del registro escrito, procedemos a identificar los rastros de comprensión que son indicadores del uso dado al algoritmo estándar de la multiplicación. Al localizar los rastros de comprensión en las interacciones colaborativas de los dos alumnos participantes, en esta ocasión estamos interpretando la comprensión matemática colectiva (Martin y Towers, 2003) desplegada en el episodio. El propio uso del algoritmo será caracterizado en una siguiente etapa a partir de estos rastros.

Fragmento I. Reconocimiento externo de las tres variantes del algoritmo

El episodio se inicia con un recorrido comparado por las tres variantes buscando encontrar el algoritmo estándar.

> **M2:** *Ya. Claro, o sea, la original podríamos decir que es ésta* [la tercera variante] *porque a ver: éste... 2 por 3, 6; 2 por 2... ¡ah, no!*
> **R5:** *¡Todo está mal!*
> **M6:** *Los tres... ¡No están mal! Porque en realidad es una buena multiplicación, simplemente que están... este... canjeados, ¿no es cierto?*
> **R6:** *Claro, canjeados.*

Los estudiantes conocen la disposición de los productos parciales en el algoritmo estándar y la utilizan como referencia para identificar y comprobar la corrección del procedimiento seguido en cada método alternativo (M2). Además, perciben que un mismo resultado correcto (el 736) se obtiene de aplicar distintas secuencias de cálculo no estándar (M6, R6). Por ello, comienzan a reconocer en el algoritmo dos aspectos diferentes relacionados: *a)* el *resultado*, tomado como criterio de corrección de la multiplicación, y *b)* el *procedimiento* que conduce al resultado y que varía según el caso.

Fragmento II. Diferencias en la disposición espacial de las cifras

El análisis de las variantes prosigue en el nivel externo. Los alumnos centran la atención en los espacios en blanco presentes en los resultados parciales de estas variantes.

> **M7:** *Entonces, este..., o sea, empezando porque hay diferencias entre los espacios: acá, acá; acá, acá y acá, acá* [redondea los dos espacios o "huecos" en los resultados parciales]. *Hay diferencias, ¿no? Hay dos tipos de espacios.*
> **R8:** *Ya, pero este tipo de espacio es el normal* [indicando la tercera variante].
> **M8:** *Claro, o sea, en el espacio, éste* [tercera variante] *sería el correcto.*

Para M y R, las tres variantes no son equivalentes en cuanto a la disposición espacial de las cifras en los resultados parciales (M7). Reconocen dos tipos: *a)* la disposición estándar, considerada correcta (tercera variante) y *b)* otra no usual donde varía el orden (primera y segunda variantes). De sus comentarios se desprende que ambos estudiantes catalogan el tercer procedimiento como menos incorrecto por conservar al menos la disposición espacial del algoritmo estándar (R8, M8).

Fragmento III. Reconocimiento de la propiedad distributiva

La discusión se traslada ahora al ámbito de las propiedades y relaciones internas que fundamentan el algoritmo estándar.

> **M10:** *En la multiplicación ninguno de los tres está correcto.*
> **R12:** *Sí, está al revés.*
> **M13:** *... de todas formas es una multiplicación. O sea, todos los números se multiplican, sólo que van invirtiendo y jugando con los centros.*

Aunque ambos afirmen que los tres procedimientos de cálculo son incorrectos, M evidencia como rasgo correcto en las variantes el hecho de que todas las cifras se multiplican entre sí (M13), lo que nos hace pensar que intuye de alguna manera la propiedad distributiva característica del algoritmo estándar.

Fragmento IV. El orden estándar obstaculiza identificar la propiedad conmutativa

Durante la sistematización de la respuesta a la primera pregunta, los comentarios se dirigen a destacar el cambio de orden en números y espacios producido en los resultados parciales.

> **M19:** *¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso? Se ha jugado con el orden de los números y el orden de los espacios.*
> **R20:** *Sí. Fuera de eso, que la multiplicación del centro no concuerda con... No, no concuerda la multiplicación.*
> **M20:** *Claro. Ya, por eso. Se ha jugado con el orden de los números.*
> **R22:** *Alterando... sí, el producto del medio. Que no concuerda con la multiplicación que se tiene que hacer.*

Identificar pero no aceptar como algo correcto la manipulación de los centros (resultados parciales y espacios) (M19, R22) nos dice que los alumnos no están al tanto de la propiedad conmutativa responsable de la validez matemática de las tres variantes. La importancia otorgada al orden estándar parece ser un obstáculo a la hora de reconocer dicha conmutatividad.

Fragmento V. Búsqueda de lo correcto en las variantes y dependencia al orden estándar

Con el propósito de responder a la segunda pregunta, el análisis de las tres variantes continúa en el plano externo con la delimitación de aquellas partes y fases del cálculo que los alumnos consideran correctas por su analogía con las del algoritmo estándar.

> **M24:** *Yo no estoy de acuerdo porque creo que te complican demasiado. Además, de una u otra forma puede ser que este resultado* [señalando al resultado final de la primera variante] *salga igual, pero... no hay forma correcta para hacerlo.*
> **R26:** *Si sumas, lo que está acacito es una suma normal* [señala la suma de los productos parciales de la tercera variante].
> **M27:** *Claro y va a salir el mismo número siempre.*

R27: *Pero en acá es una multiplicación que no concuerda* [señala los productos parciales de la tercera variante].

M28: *Claro, en eso estamos de acuerdo. De todas formas, el resultado está bien. En todos, el resultado es el mismo, entonces la multiplicación es la misma. El problema está en el centro.*

Se concluye que la suma, el resultado y la multiplicación total son correctos en cada caso (R26, M28), aunque no el procedimiento seguido para el cálculo de los productos parciales (R27, M28). A pesar del reconocimiento de varios elementos correctos por su concordancia con el algoritmo estándar, persisten en la idea de que los centros son inadecuados y, por tanto, las variantes son incorrectas (M24). Una vez más, el orden estándar ejerce su influencia sobre otros aspectos caracterizadores del algoritmo, como el hecho de proporcionar siempre resultados correctos.

Fragmento VI. Delimitación de tres componentes en el algoritmo: multiplicación, procedimiento y resultado

En este punto, ambos estudiantes sienten la necesidad de efectuar la multiplicación 23×32 aplicando el algoritmo estándar.

R30: *23 por 32. 3 por 2, 6; 2 por 2…*

M31: *2 por 2, 4.*

R31: *3 por 3, 9 y 3 por 2, 6, ¿no?* [Ahora suman]. *6; 9 más 4, 5. Ah…, 3, 7.*

M32: *Sí, está bien. O sea, la multiplicación es válida y el resultado… es válido. Ahora, el problema es el procedimiento.*

R34: *Por eso, es válido el resultado y… la multiplicación, ¿no es cierto?*

R37: *Mas el procedimiento está mal.*

M37: *Entonces, el procedimiento está mal… mal desarrollado, mal efectuado.*

R38: *Mal planteado, mal desarrollado.*

M38: *Mal planteado… justamente porque alteran el orden de los números.*

Esta nueva comprobación (R30, M31, R31) sirve para confirmar que tanto la multiplicación como el resultado son válidos en las variantes (M32, R34), pero no el procedimiento a causa del orden (R37, M37, M38). Como consecuencia, llegan a intuir en el algoritmo tres componentes relacionados: la *multiplicación* en sí, compuesta de *procedimiento* y *resultado*.

Fragmento VII. Reconocimiento de la propiedad conmutativa

A partir de aquí, el diálogo se centra en la tercera pregunta.

> **R45:** *Si esto estuviera arriba o abajo* [señala los resultados parciales de la segunda variante], *el resultado sería igual, solamente que el problema es que no puedes jugar tan... variando los éstos.*
>
> **R46:** *Matemáticamente... está bien el resultado, eso sí. No hay duda.*
>
> **M46:** *Ya. Podemos decir: el orden de los factores no altera el producto, este... en este caso, si jugamos con el orden de los números y no ponemos cada uno en una posición correcta, éste... sí puede salir el resultado que queremos.*

R continúa manteniendo que las cifras de los productos parciales no se pueden cambiar, aun cuando el resultado final sea correcto, en una muestra más de que el orden estándar del procedimiento se impone al resultado (R45). Sin embargo, casi simultáneamente se observa un primer reconocimiento de la propiedad conmutativa por parte de M (M46), oculto hasta entonces, pero evidenciado ahora por la aceptación conjunta de que el resultado en las tres variantes es correcto (R46). Finalmente, aceptan que distintos procedimientos de cálculo con cambios en el orden de las cifras pueden derivar en un mismo resultado correcto (M46).

Fragmento VIII. Dos tipos de órdenes en el algoritmo

Ahora se ven obligados a encontrar una justificación para el dilema *distintos procedimientos–mismo resultado.*

> **M48:** *A pesar de que han jugado con los órdenes, lo han puesto ordenadamente para que salga este resultado después* [el 736]. *Porque si lo hubieran puesto al "champazo", o sea, podría haber salido digamos...*
>
> **R50:** *Otro número, otro resultado. Mas sale este número* [el 736].

> **M50:** *Claro. De todas formas, este... es importante conservar un orden en el desarrollo de una multiplicación.*

Una solución provisional la encuentran sugiriendo dos tipos de órdenes no estándar en el procedimiento de multiplicar: *a)* uno más "arbitrario" que proporcionaría resultados distintos y *b)* otro más "ordenado" que garantiza la corrección del resultado final. Para ellos, las tres variantes analizadas utilizan órdenes del segundo tipo. Pero a pesar de todo, sucumben de nuevo al orden estándar al persistir en la importancia de fijar un mismo orden mantenido en el desarrollo de una multiplicación (M50).

Fragmento IX. Dependencia al orden estándar

A modo de conclusión, los comentarios finales del episodio se destinan a subrayar la preeminencia del procedimiento sobre cualquier otro aspecto del algoritmo.

> **R56:** *Razones matemáticas: está mal planteada. Es lo que hemos dicho, está mal desarrollada la multiplicación por más que sea el resultado... bien.*
> **M56:** *Claro. Podríamos decir, ¿no?: es una adecuación válida en el sentido de que han sido ordenados... con el propósito de conseguir el mismo resultado. Entonces, ahí sí es una adecuación válida. Pero cuando no es válida es si lo hubieran hecho al "champazo", por decirlo así, no funcionaría.*
> **M59:** *... los principios de la multiplicación no son así, no puedes andar jugando con el orden de las cosas. [...] hay una estructura de desarrollo que se debe aplicar en la multiplicación.*
> **R61:** *Y es para facilitarte las cosas.*
> **M61:** *Claro.*
> **R63:** *¡Eso es lo que pasó en ese problema!* [risas] *No tengo el orden por más que el resultado sea lo mismo.*

En principio, para los alumnos las variantes son "ordenadas" al haberse impuesto un orden al proceder que, aun siendo distinto al estándar, permite llegar al resultado correcto (M56). Sin embargo, esto no es suficiente para poder afirmar que son correctas. La justificación la encuentran en el orden estándar, que no se cumple (M59) y, como consecuencia, los cálculos se complican innecesariamente (R61, R63).

4.4. Usos y comprensión del algoritmo

En esta fase recobra relevancia la dimensión fenómeno-epistemológica para trascender al texto y enfrentarnos al conocimiento matemático puesto en acción. Se trata de *a)* identificar a lo largo del episodio descrito el uso que los estudiantes van haciendo del algoritmo estándar en sus distintas modalidades de empleo técnico, analítico y formal, y *b)* caracterizar las relaciones más destacadas que estos alumnos establecen entre estas modalidades de empleo. En el cuadro 2 se exponen los indicios que observamos de estos usos y las relaciones en los rastros de comprensión detectados en los fragmentos de actividad matemática.

En Gallardo y González (2006) dimos unas primeras muestras de la presencia de las facetas técnica, analítica y formal de la comprensión del algoritmo de la multiplicación en diferentes alumnos y mediante distintas tareas. Con el episodio de ahora damos un paso más en la interpretación de la comprensión del algoritmo, al evidenciar no sólo la presencia, sino también las relaciones y la evolución de estas tres facetas en unos mismos estudiantes a lo largo de la resolución de una situación problemática.

La comprensión técnica se manifiesta cuando los alumnos recorren de manera efectiva la secuencia algorítmica estándar (rastros [1] y [9]) y cuando contemplan al orden convencional como una característica inalterable del algoritmo que supera en importancia a otros aspectos de éste (rastros [6], [8], [11], [14] y [16]). La comprensión analítica, por su parte, se pone de manifiesto con regularidad mediante el reconocimiento de las distintas partes del algoritmo (rastros [2], [3], [5], [7], [10], [13] y [15]). Cabe destacar que, a lo largo del episodio, apreciamos una evolución positiva en esta faceta de comprensión, que se inicia con la diferenciación básica entre procedimiento y resultado, prosigue con la identificación de un mayor número de elementos constituyentes del algoritmo (multiplicación, procedimiento, suma, resultado) y llega incluso a la justificación de distintos tipos de órdenes en el procedimiento. Finalmente, la comprensión formal de los alumnos se hace presente, aunque en menor medida, en el reconocimiento de las propiedades distributiva y conmutativa que fundamentan el algoritmo estándar (rastros [4], [12], [13] y [15]).

Nuestra interpretación pone en evidencia que las facetas de comprensión técnica, analítica y formal no son independientes para los estudiantes, sino que aparecen estrechamente relacionadas al utilizar el algoritmo estándar en la resolución de la tarea. Uno de los hechos habituales en la utilización del

Cuadro 2 Usos y relaciones en las facetas técnica, analítica y formal del algoritmo estándar de la multiplicación

Fragmentos	Rastros de comprensión	Usos del algoritmo	Relaciones entre facetas
Fragmento I	[1] Comprobar las variantes por comparación con el algoritmo estándar.	Técnico	
	[2] Reconocer en el algoritmo dos elementos diferentes: procedimiento y resultado.	Analítico	
Fragmento II	[3] Catalogar dos tipos de disposiciones en las cifras y espacios de los resultados parciales.	Analítico	
Fragmento III	[4] Percibir la propiedad distributiva en el algoritmo.	Formal	
Fragmento IV	[5] Corroborar la manipulación en el orden de las cifras y espacios en las variantes.	Analítico	
	[6] No aceptar la validez matemática de dicha manipulación por no coincidir con el orden estándar.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal
Fragmento V	[7] Diferenciar distintos elementos en el algoritmo: la multiplicación en sí, los centros, la suma, el resultado.	Analítico	
	[8] Insistir en lo inadecuado de los procedimientos (no son como el estándar) a pesar de los resultados correctos.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal

Fragmentos	Rastros de comprensión	Usos del algoritmo	Relaciones entre facetas
Fragmento VI	[9] Efectuar 23×32 con el algoritmo estándar.	Técnico	
	[10] Diferenciar tres elementos en las variantes: la multiplicación (correcta) compuesta de procedimiento (incorrecto) y resultado (correcto).	Analítico	Fomento de la faceta analítica a partir de la técnica
Fragmento VII	[11] Anteponer el orden estándar en los productos parciales a la corrección del resultado.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la formal
	[12] Intuir la propiedad conmutativa en el algoritmo.	Formal	Fomento de la faceta formal a partir de la técnica
Fragmento VIII	[13] Sugerir dos tipos de órdenes no estándar al multiplicar. Uno garantiza un mismo resultado correcto, el otro no.	Analítico-formal	
	[14] Retornar al procedimiento estándar por la importancia de seguir siempre un mismo orden al multiplicar.	Técnico	
Fragmento IX	[15] Aceptar que procedimientos no estándar "ordenados" pueden generar resultados correctos.	Analítico-formal	
	[16] Afirmar que esto último no es suficiente para concluir que las variantes son correctas.	Técnico	Interferencia de la faceta técnica sobre la analítica-formal

conocimiento matemático es precisamente el de su elección previa entre otras opciones de resolución. Entendemos que, durante la toma de decisión requerida en esta etapa concreta, se genera un escenario de influencias positivas (fomentos) y negativas (interferencias) entre conocimientos, donde emergen los distintos vínculos entre ellos que llegan a determinar el uso posterior de tales conocimientos en la resolución de la situación dada. En esta ocasión, hallamos indicios de estas dos relaciones significativas entre las facetas, en apariencia contradictorias. Como primera relación, la dependencia del orden estándar pone en evidencia la *interferencia* en la comprensión del algoritmo que, de modo recurrente, ejerce la faceta técnica sobre la formal. Los rastros [6], [8], [11] y [16] son claros ejemplos de cómo la persistencia de la comprensión técnica impide transitar de forma flexible hacia otros aspectos y usos del algoritmo característicos de la comprensión formal. En cambio, la segunda relación apunta más bien en sentido contrario, hacia el *fomento* o desarrollo de las facetas analítica y formal por impulso de la técnica. Los rastros [10] y [12] dan cuenta de ello. Mediante una nueva comprobación del algoritmo estándar, se consolida la idea de tres componentes relacionadas (multiplicación, procedimiento y resultado) y el hecho constatado de que el resultado correcto se mantiene en las tres variantes hace intuir la propiedad conmutativa.

Consideramos que la variedad de facetas y matices identificados sobre la comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación en este episodio concreto también pone de manifiesto el potencial interpretativo de nuestro modelo en el nivel genérico. Así, la interpretación realizada en el seno del algoritmo estándar da muestras, por una parte, de la complejidad inherente a la comprensión de los algoritmos aritméticos y los procedimientos de cálculo en general. Y por otra, de la posibilidad de profundizar en el estudio de la comprensión en matemáticas con propuestas que renuevan y amplían la conocida dualidad entre lo conceptual y lo procedimental, propia de modelos más tradicionales.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Nos hemos aproximado en este trabajo a una de las cuestiones abiertas presentes en el estudio de la comprensión a la que se viene enfrentando con regularidad la investigación en educación matemática. Nos referimos al problema de la interpretación, por parte de un agente externo (profesor o investigador), de la comprensión matemática de los estudiantes a partir de la actividad que manifiestan cuando se enfrentan a situaciones problemáticas que requieren el uso del conocimiento matemático objeto de comprensión.

En línea con otras contribuciones integradoras (Duval, 2006), hemos argumentado aquí en favor de una visión interpretativa que conecta las orientaciones cognitiva y semiótica con objeto de extender, en lo posible, el campo operativo de la interpretación. Nuestra propuesta incluye una dimensión fenómeno-epistemológica donde se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas de utilidad para la práctica docente, que consideramos compatible con otros procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático (Godino, 2002; Niemi, 1996). La novedad de nuestra contribución consiste en partir de conocimientos matemáticos sobre los cuales exigimos un análisis epistemológico y fenomenológico para determinar conjuntos reducidos de situaciones representativas pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión. Además, la reflexión sobre la comprensión transcurre en términos de posibilidad de uso del conocimiento matemático en tales situaciones.

La dimensión fenómeno-epistemológica se ve fortalecida con una segunda dimensión hermenéutica, donde la interacción en el aula y la toma de conciencia de la actividad matemática por parte de los estudiantes configuran un escenario de interpretaciones mediadas por el contexto social y cultural (Brown, 1996; Planas, 2006). Esta dimensión nos permite gestionar desde una posición más inclusiva la complejidad inherente a la interpretación de la comprensión en matemáticas. Por ello, unimos lo expuesto a otras contribuciones hermenéuticas (Brown, 2001) para responder positivamente desde el contexto específico de la valoración a la cuestión de la potencialidad del conocimiento hermenéutico para la educación matemática.

Con la aplicación del modelo al episodio del algoritmo estándar de la multiplicación, hemos pretendido mostrar en la práctica su potencialidad como referencia objetiva para la interpretación de la comprensión a partir del uso visible del conocimiento matemático. Aspiramos a aportar un instrumento operativo con potencialidad descriptiva y prescriptiva para gestionar la actividad interpretativa que se ejerce regularmente en el aula de matemáticas, una labor compleja que situamos en el núcleo de la discusión sobre los problemas fundamentales de la educación matemática.

Nuestro modelo es una propuesta en desarrollo cuya configuración admite ser mejorada y ampliada. Quedan cuestiones abiertas por resolver, como profundizar en la visión funcional de la comprensión presentada aquí a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad, como el aprendizaje o la competencia matemática. En lo que respecta a la dimensión fenómeno-epistemológica, con vistas a identificar los límites de su aplicabilidad, resultan pertinentes nuevos estudios centrados en conocimientos matemáticos más complejos que el algoritmo analizado en esta ocasión. En la dimensión hermenéutica, al situar la referencia última de la comprensión en el uso del conocimiento matemático, se hace preciso responder a la cuestión ontológica de la existencia de los objetos matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, T. (1996), "Towards a Hermeneutical Understanding of Mathematics and Mathematical Learning", en P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, Londres, Reino Unido, Routledge Falmer, pp. 141-150.

_______ (2001), *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*, Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

_______ (2008), "Making Mathematics Inclusive: Interpreting the Meaning of Classroom Activity", *Philosophy of Mathematics Education Journal*, núm. 23, pp. 1-18. Recuperado de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm

Dörfler, W. (2006), "Inscriptions as Objects of Mathematical Activities", en J. Maasz y W. Schoeglmann (eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*, Rotterdam, Holanda, Sense Publishers, pp. 97-111.

Duffin, J. y A. Simpson (2000), "A Search for Understanding", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 18, núm. 4, pp. 415-427.

Duval, R. (2006), "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, núms. 1-2, pp. 103-131.

Font, V., J.D. Godino y B. D'Amore (2007), "An Onto-semiotic Approach to Representations in Mathematics Education", *For the Learning of Mathematics*, vol. 27, núm. 2, pp. 2-7.

Font, V., J.D. Godino y J. Gallardo (2013), "The Emergence of Objects from Mathematical Practices", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 82, núm. 1, pp. 97-124.

Gallardo, J. y J.L. González (2006), "Assessing Understanding in Mathematics:

Steps Towards an Operative Model", *For the Learning of Mathematics*, vol. 26, núm. 2, pp. 10-15.

Godino, J.D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, núms. 2-3, pp. 237-284.

Godino, J.D., C. Batanero y V. Font (2007), "The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education", *The International Journal on Mathematics Education* ZDM, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Goldin, G. (2002), "Representation in Mathematical Learning and Problem Solving", en L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 197-218.

Hiebert, J. y T.P. Carpenter (1992), "Learning and Teaching with Understanding", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, NY, MacMillan, pp. 65-97.

Kieran, C. (1994), "Doing and Seeing Things Differently: A 25-year Retrospective of Mathematics Education Research on Learning", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 6, pp. 583-607.

Llewellyn, A. (2012), "Unpacking Understanding: The (re)Search for the Holy Grail of Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 81, núm. 3, pp. 385-399.

Martin, L.C. y J. Towers (2003), "Collective Mathematical Understanding as an Improvisational Process", en N.A. Paterman, B.J. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, HI, PME, vol. 3, pp. 245-252.

Morgan, C. y A. Watson (2002), "The Interpretative Nature of Teacher's Assessment of Students' Mathematics: Issues for Equity", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, núm. 2, pp. 78-111.

Niemi, D. (1996), "Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications", *The Journal of Educational Research*, vol. 89, núm. 6, pp. 351-363.

Planas, N. (2006), "Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 1, pp. 37-72.

Rico, L. (2009), "Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática", PNA, vol. 4, núm. 1, pp. 1-14.

Ricœur, P. (2002), *Del texto a la acción*, Ciudad de México, México, Fondo de Cultura Económica.

Tahta, D. (1996), "On Interpretation", en P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, Londres, Reino Unido, Routledge Falmer, pp. 125-133.

DATOS DE LOS AUTORES

Jesús Gallardo Romero
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
gallardoromero@telefonica.net

José Luis González Marí
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
gmari@uma.es

Verónica Aurora Quintanilla Batallanos
Colegio Pukllasunchis, Cusco, Perú
Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, Universidad de Málaga, Málaga, España
veronicaquintanilla@uma.es

Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial

Patricia Sureda y María Rita Otero

Resumen: En este trabajo se describe el proceso de conceptualización de cuatro grupos de alumnos del colegio secundario (115 alumnos de 15-16 años) en el campo conceptual de las *funciones exponenciales* en una dinámica de estudio que prioriza la participación del alumno en la construcción del conocimiento. En particular, se utilizan los constructos teóricos propuestos por la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2007a, 2007b, 2011) para describir las respuestas de algunos alumnos cuando se les proponen problemas relativos a las funciones exponenciales. Se describe el proceso de conceptualización de dicha función, identificando cinco niveles relacionados con los sistemas de representación empleados por los estudiantes.

Palabras clave: conceptualización, enseñanza, funciones exponenciales, sistemas de representación, secundaria.

Abstract: This paper describes the process of conceptualization of four groups of pupils in high school (121 students around the age of 15-16 years), and the way they study the conceptual field of *exponential functions* with a dynamic of study, in which the first aim is the participation of the pupil in the construction of knowledge. The theoretical constructs proposed by Vergnaud's Conceptual Fields Theory (1990, 1996, 2007a, 2007b, 2011) are specially used to describe the answers of some pupils when a problem that is solved through means of exponential models is proposed. The analysis of the protocols shows a process of conceptualization, linked to the different systems of representation of the exponential function, which is possible to describe by five stages.

Keywords: concept, systems of representation, exponential function, teaching, secondary.

Fecha de recepción: 6 de junio de 2012; fecha de aprobación: 8 de junio de 2013.

INTRODUCCIÓN

Las situaciones son claves en el aprendizaje de conceptos, pues como dice Vergnaud (1990, p. 133), "es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño". En la construcción de un concepto matemático, es importante el desarrollo de invariantes operatorios explicitables y formalizables que se relacionen con el sistema de representación en que el que se propone la tarea. Por otra parte, y desde otros referenciales teóricos (Douady, 1986; Janvier, 1987; Kaput, 1987; Dubinsky y Harel, 1992; Duval, 1999; García y Llinares, 1994; Font, 2001; Rico, 2009; etc.), se advierte que el estudio de conceptos complejos, como el de función, requiere para su total comprensión el empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. Así, si se está interesado en la enseñanza de conceptos complejos, como el de función exponencial, se debe tener en cuenta que el diseño de las situaciones tendrá que involucrar más de un sistema de representación.

En este contexto, y con el propósito de enseñar las funciones exponenciales con sentido para los alumnos en la escuela secundaria, se planificó, diseñó, implementó y analizó un conjunto situaciones que involucraba cinco sistemas de representación. Éstos son el sistema de representación numérico (SRN), el algebraico de primer orden (SRA1), el algebraico de segundo orden (SRA2), el analítico-gráfico (SRG) y el verbal escrito (SRVE).

DIFICULTADES ASOCIADAS A LA ENSEÑANZA DE VARIACIONES NO LINEALES

Una de las dificultades vinculada con la enseñanza de variaciones no lineales es que los alumnos tienden a resolver los problemas no lineales como si fueran lineales. Así, en un estudio realizado con 400 alumnos de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), 50% utilizó esquemas lineales para resolver problemas exponenciales (Villarreal, Esteley y Alagia, 2005). La propensión a sobregeneralizar el empleo de modelos lineales más allá de su rango de aplicación está presente también en el nivel medio. Por ejemplo, los estudios de De Bock, Von Doorem y Verschaffel (2011), De Bock, Von Doorem, Janssens y Verschaffel (2002) y De Bock, Verschaffel y Janssens (2002, 1998) realizados con estudiantes secundarios (12 a 16 años), revelan una tendencia fuerte y resistente al cambio, al aplicar modelos lineales para resolver situaciones problemáticas que involucran longitud y área de figuras planas semejantes.

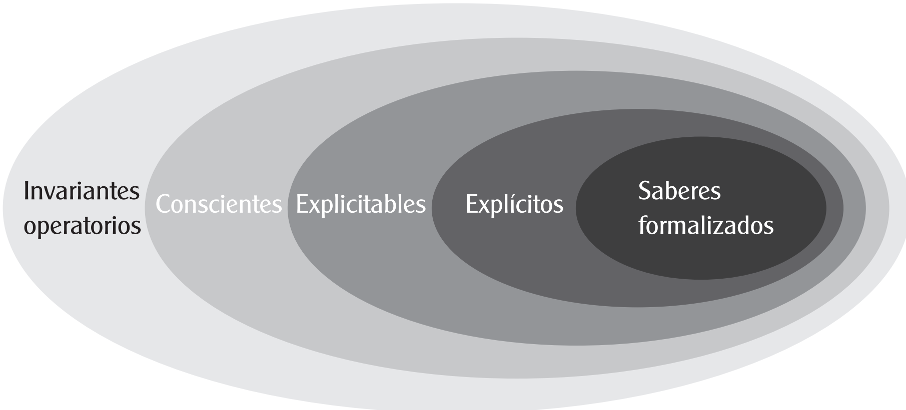
La sobregeneralización de modelos lineales en diversos tipos de problemas y contextos de la enseñanza secundaria y universitaria, denominada también extensión de modelos lineales a contextos no lineales, ha sido informada por diversos trabajos (Karrer y Magina, 2000; Sessa y Vilotta, 2008). En este último, se presenta a un grupo de alumnos de la escuela secundaria un problema sobre el crecimiento de bacterias con el propósito de introducir la noción de función exponencial, los autores advierten una tendencia general de los alumnos a abordar las cuestiones con procedimientos que sólo son válidos en el modelo lineal.

Sin embargo, estos trabajos no documentan si esas primeras estrategias se modifican a lo largo del estudio ni cómo se modifican. En este trabajo se muestran las acciones de los alumnos al abordar situaciones relativas a un concepto no lineal complejo como las funciones exponenciales y cómo se modifican éstas a medida que se avanza en el estudio de la función exponencial. En particular, se identifican cinco etapas en el proceso de conceptualización, vinculadas con los diferentes sistemas de representación. Se describe cada una de las etapas en profundidad, a la vez que se muestra cómo se construye el concepto de función exponencial en cada sistema de representación.

VINCULACIÓN ENTRE INVARIANTES OPERATORIOS Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los *invariantes operatorios* son definidos por Vergnaud (1990, p. 148) como conceptos en acto y teoremas en acto. Un concepto en acto es una categoría pertinente y, como tal, no es susceptible de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un teorema en acto es una proposición tenida por verdadera en la actividad. Los invariantes operatorios son los que dan significado al concepto. Por otra parte, un concepto en acto no es un concepto, ni un teorema en acto es un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Éste no es necesariamente el caso para los invariantes operatorios. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización, pero sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios implícitos, esta parte visible no sería nada. Los invariantes operatorios son, en

Diagrama 1



particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas, ya que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta por atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990, p. 148). En consecuencia, las decisiones que tome un alumno ante una determinada situación van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los conceptos en acto y teoremas en acto de los que disponga el sujeto para enfrentar la situación. Los invariantes operatorios son, pues, los que hacen operatorio el esquema. Cuando los conceptos y teoremas en acto se hacen explícitos, se convierten en objetos de reflexión cuya validez se puede discutir, pues se los aproxima a los conocimientos científicos. Por otra parte, todos los conocimientos científicos tienen sus raíces en teoremas y conceptos en acto, que son la base de toda la conceptualización. Los conocimientos científicos, como los conocimientos matemáticos, son conocimientos formalizados que no forman más que una parte de los conocimientos explícitos en la actividad, los cuales no son más que un subconjunto de los conocimientos explicitables. En el diagrama 1, Vergnaud (2007b, p. 299) evidencia este hecho.

Este diagrama 1 también permite distinguir entre los conocimientos que se pueden poner en palabras, *forma predicativa del conocimiento,* y los que no, *forma operatoria del conocimiento* (Vergnaud, 2007a, p. 286). La forma operatoria permite actuar en situación y a la larga tener éxito, mientras que la forma predicativa es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. Este trabajo, por centrarse en el análisis de las producciones escritas de los alumnos en la clase de matemática, se centra en el conocimiento predicativo de la conceptualización. Éste, aunque es una dimensión esencial del conocimiento, sólo da cuenta imperfectamente del conocimiento operatorio que se pone en acto en situación.

Por otra parte, los invariantes también forman parte de los conceptos. Vergnaud (1990, p. 140) define los conceptos como un triplete de tres conjuntos: C (S; IO; SR). La referencia (S) es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto, aquí la situación tiene el carácter de tarea; el significado (IO) es el conjunto de invariantes operatorios, y el significante (SR) son los sistemas de representación. Así, la construcción pragmática de un concepto involucra tanto los invariantes operatorios como las tareas que componen cada situación y los sistemas de representación involucrados. En particular, en la escuela secundaria, la explicitación y formalización de los conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación cobra vital importancia. Puesto que es durante el proceso de explicitación de los conceptos cuando los sistemas de representación están más fuertemente presentes, este trabajo se centra en el análisis de aquellos invariantes operatorios explicitables que pueden ser explícitos y formalizables en cada sistema de representación.

PREGUNTA DE LA INVESTIGACIÓN

¿Qué características de la conceptualización, relativas al estudio en la escuela secundaria del campo conceptual de las *funciones exponenciales*, es posible inferir a partir del conocimiento explicitado por los alumnos en las resoluciones de situaciones problemáticas mediante los sistemas de representación?

METODOLOGÍA Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

En primer lugar, se reconstruyó el campo conceptual de las funciones exponenciales para cuarto año (15-16 años) del colegio secundario. Luego, en el marco de la teoría, se planificó y diseñó un conjunto de diez situaciones, dos síntesis, tres conjuntos de ejercicios y una evaluación.

Debido a la relevancia de los sistemas de representación en la conceptualización y explicitación de los conceptos, las tareas de las situaciones se diseñaron en torno a los siguientes sistemas de representación:

- *Sistema de representación numérico (SRN):* refiere tanto a las tablas como a los cálculos con números.
- *Sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1):* involucra aquellos procedimientos algebraicos en los que los parámetros están inicializados. Por ejemplo, $2 \bullet 5^x = 3$.
- *Sistema de representación algebraico de segundo orden (SRA2):* refiere únicamente a los procedimientos algebraicos en los que los parámetros no están inicializados. Por ejemplo, $a \bullet b^x = c$.
- *Sistema analítico-gráfico (SRG):* refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos.
- *Sistema verbal escrito (SRVE):* son las formas lingüísticas escritas, sean situaciones, aseveraciones, etcétera.

Se llevó a cabo un estudio piloto en clases de matemática de un curso de cuarto año compuesto por 37 alumnos. Luego de la prueba piloto, el conjunto de situaciones fue readaptado e implementado en dos cursos de cuarto año (15-16 años) durante dos meses y medio en clases de matemática de una escuela de la ciudad que atiende a sectores urbanos medios. El primero de los cursos corresponde a la modalidad de Ciencias Naturales (31 alumnos) y se caracterizó por contar con una gran cantidad de alumnos que tienen interés en aprender. El segundo curso corresponde a la modalidad de Economía y Gestión de las Organizaciones (28 alumnos). Éste era un curso más disperso y mostraba menos predisposición para aprender. En ambos grupos de clase se gestionó desde el principio del año lectivo una dinámica de estudio que priorizaba la participación del alumno en la construcción del conocimiento. Así, para el momento de la implementación, los alumnos de ambos cursos estaban acostumbrados a estudiar en grupos. La implementación en ambos cursos se realizó durante el mismo periodo y por la misma profesora, quien forma parte del grupo de investigación.

Se registraron las clases en audio y se recogieron los protocolos de los estudiantes clase por clase. Una vez escaneados, los protocolos eran devueltos. La recolección sistemática de los protocolos clase por clase es indispensable para el estudio de la conceptualización, ya que para ello resulta imprescindible tener acceso a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes, pues éstos suelen borrar y/o modificar las primeras estrategias por otras “más pertinentes” o consensuadas con el grupo de clase. También resultó relevante, a la hora de analizar los protocolos, el poder distinguir entre las estrategias propias del alumno en situación y las consensuadas con el grupo de clase. Solicitar a los alumnos que no borren nada de lo que escriben y que señalen mediante la separación por una recta las resoluciones propias de las del grupo de clase resultaron estrategias adecuadas para este fin. A partir de los protocolos, se realiza todo el análisis de los datos.

Terminada la implementación y con el propósito de describir las características de la conceptualización, se analizaron las respuestas escritas de los alumnos a todas las situaciones. La conceptualización involucra una relación dialéctica entre las situaciones y los conceptos: las situaciones dan sentido a los conceptos y un mayor desarrollo conceptual del sujeto le permite abordar situaciones más complejas. El análisis de la *conceptualización*, que se hace a partir de los esquemas, pasa inevitablemente por el análisis de la *actividad*, cuyas conductas observables son una parte muy pequeña, pues aunque el *esquema* no es una conducta, tiene la función de generar la *actividad* y la conducta en *situación*. En consecuencia, es posible estudiar los componentes que permiten el funcionamiento del *esquema*, esto es, los *invariantes operatorios*, mediante el análisis de las conductas, en particular por medio de las resoluciones escritas de los alumnos cuando enfrentan un problema.

La respuesta de 59 alumnos al conjunto de tareas compuesto por las situaciones, las síntesis y los ejercicios produjo 885 protocolos. Un protocolo es la respuesta de un alumno a una situación, síntesis o ejercitación. Las respuestas de los alumnos fueron analizadas protocolo por protocolo y clasificadas según se muestra en el cuadro 1. La agrupación de las respuestas a las primeras situaciones en torno a las primeras etapas y su desplazamiento hacia las etapas finales a medida que se desarrollaba la implementación permitió reconocer en la conceptualización de la función exponencial un proceso compuesto por cinco etapas (cuadro 1). Este proceso resultó común a ambos grupos de clase. Es decir, a pesar de las diferencias descritas entre los cursos, las estrategias de los alumnos al resolver las situaciones eran similares y permitieron generar las mismas etapas. Así, y aunque la construcción de las etapas se realizó a partir de las estrategias de resolución de cada uno de los alumnos involucrados en esta investigación, en este trabajo se describe un proceso de conceptualización común a todos ellos.

La comprensión de conceptos matemáticos complejos, como el de función exponencial, requiere el empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. Y puesto que no es posible discutir el significado de conceptos totalmente implícitos, su explicitación, discusión y formalización en cada sistema

Cuadro 1

Etapa	Indicador
Lineal	Respuesta lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente no lineal	Respuesta no lineal en por lo menos un sistema de representación.
No lineal	Respuesta no lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente exponencial	Respuesta exponencial en por lo menos un sistema de representación.
Exponencial	Respuesta exponencial en todos los sistemas de representación.

de representación resulta un aspecto central de la enseñanza de la matemática escolar actual. Por otra parte, durante el proceso de explicitación de los conceptos es donde los sistemas de representación están más fuertemente presentes, pues no es posible explicitar un concepto matemático complejo si no es mediante un sistema de representación. Así, la caracterización de las etapas que forman parte del proceso de conceptualización se construyó a partir de la explicitación que los alumnos realizaban en cada sistema de representación. Esto permitió describir un proceso que comienza en la etapa totalmente lineal y se va complejizando a medida que los alumnos logran la explicitación del concepto en cada uno de los sistemas de representación involucrados en la situación.

Una vez caracterizadas las etapas, se tomaron decisiones sobre el ajuste de la propuesta de enseñanza que, debido al nuevo diseño curricular, debió considerar también la reubicación de los contenidos en quinto año y, por tanto, se implementó en dos cursos de quinto año (16-17 años) de la misma escuela. Los cursos correspondían de igual manera a Naturales (27 alumnos) y Economía (29 alumnos). El análisis de la resolución de los 56 alumnos clase por clase evidencia que el proceso de conceptualización de la función exponencial se desarrolló en las cinco etapas ya descritas.

LAS TAREAS Y SU ANÁLISIS

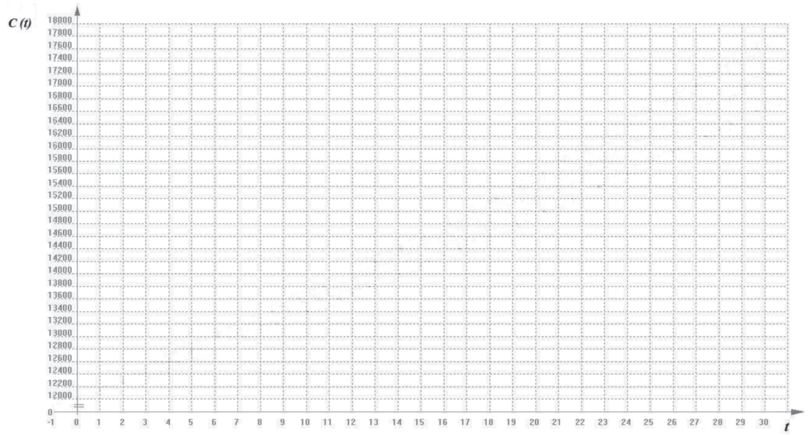
La implementación del conjunto de situaciones en los dos cursos de cuarto año se realizó luego de que los alumnos habían estudiado las funciones lineales vinculadas con el interés simple y habían calculado porcentajes y la tasa de interés en el modelo lineal. Ya que las primeras tres situaciones refieren a un problema vinculado con la capitalización de dinero puesto a interés compuesto, se acordó que, si se colocaba dinero con una tasa de interés de 1%, cada mes, se obtenía 1% más que el mes anterior. Convenido esto, se les propuso la siguiente situación.

Situación 1

Un grupo de chicos tiene $12 000 para su viaje de egresados y los quiere poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 0.011 y les permite tener $12 132 cumplido el primer mes.
La tasa mensual del **Banco 2** es de 0.012 y les permite tener $12 144 cumplido el primer mes.
La tasa mensual del **Banco 3** es de 0.013 y les permite tener $12 156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco, calculando al menos tres valores.



c) ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Recuerda que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja y no borrar nada de lo que escribas.

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados en cada una de ellas, se describen en el cuadro 2.

A continuación, se presentan y describen las resoluciones de cinco alumnos: A26, A19, A6, A14 y A22, que resultan ser representativas de las cinco diferentes etapas de conceptualización construidas.

Cuadro 2

Tarea	Sistema de representación
T1: ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?	Numérico (SRN) Verbal escrito (SRVE)
T2: Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.	Gráfico (SRG) Numérico (SRN)
T3: ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?	Verbal escrito (SRVE)

Etapa lineal

Se dice que la etapa es totalmente lineal, cuando la respuesta del alumno a una situación dada es lineal en cada uno de los sistemas de representación que elige para resolver la tarea. Un tercio de las respuestas a la primera situación en las dos implementaciones que se realizaron en cuarto año fueron totalmente lineales. Pero este tipo de respuestas desaparece luego de la segunda situación.

Por ejemplo, en la figura 1 el alumno A26 considera que el aumento en la cantidad de dinero es una cantidad constante y formula la expresión algebraica lineal: Banco 1 = 12 000 + 132 • *t*. Así, se tiene que las acciones de A26, en esta tarea, son lineales y parecen estar dirigidas por la proposición "Es posible calcular el dinero puesto a IC mediante una expresión algebraica lineal". Esta proposición, que parece guiar las acciones de A26 en el sistema de representación (SRA1), es lo que Vergnaud (1990, pp. 138-139) denomina "teorema en acto". Esto permite inferir que los invariantes operatorios que guían su resolución en este sistema de representación son lineales.

En la segunda tarea, calcula el dinero para los primeros tres meses mediante la fórmula expresada como si aumentara 132 pesos cada mes y obtiene un aumento lineal en la cantidad de dinero. Luego, dibuja tres rectas en el sistema de ejes cartesianos. Así, las acciones de A26 son también lineales en los sistemas de representación numérico y gráfico (SRN y SRG). Finalmente, cuando se le pregunta qué función dibujó, él afirma: "es una función lineal" (figura 1).

Figura 1

A26 **A26** .../.../2009

Situación 1

Un grupo de chicos tiene $12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

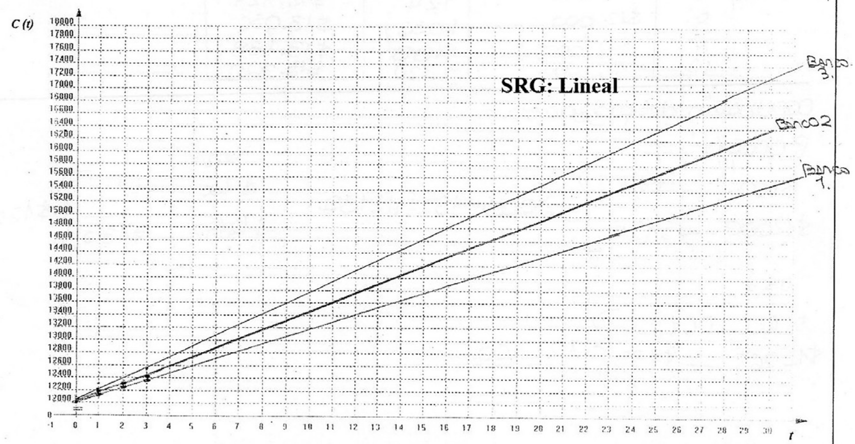
La tasa mensual del **Banco 1** es de 0,011 (1,1%) y les permite tener $12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 0,012 (1,2%) y les permite tener $12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 0,013 (1,3%) y les permite tener $12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?

b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.



c) ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

a) BANCO 1 = $12.000 + 132 . t
BANCO 2 = $12.000 + 144 . t
BANCO 3 = $12.000 + 156 . t

t = tiempo

SRA1: Lineal

$\frac{12.000 \times 1,1}{100} = 132$

$\frac{12.000 \times 1,2}{100} = 144$

$\frac{12.000 \times 1,3}{100} = 156$

b)

BANCO	1 mes	2 mes	3 mes
BANCO 1	12.132	12.264	12.396
BANCO 2	12.144	12.288	12.432
BANCO 3	12.156	12.312	12.468

SRN: Lineal

c) Es una función lineal, porque su gráfica es una recta y tiene dominio y imagen. **SRVE: Lineal**

Cuadro 3

SRA1	SRN	SRG	SRVE
T.A.A1: "Es posible calcular el dinero puesto a IC mediante una expresión algebraica lineal"	T.A.N: "Aumenta lo mismo cada mes"	T.A.G: "Es posible unir dos puntos mediante una recta" T. A.G: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC es una recta"	T.A.G: "Es una función lineal porque la gráfica es una recta"
Lineal			
Totalmente lineal			

A partir de estas resoluciones, se infieren teoremas en acto que parecen guiar las acciones de A26 en cada sistema de representación (cuadro 3).

En síntesis, estas resoluciones muestran que los invariantes operatorios involucrados en cada sistema de representación son lineales, pues tal como establece la teoría de los campos conceptuales (TCC), los *invariantes operatorios* guían la selección de la información y la acción. Se evidencia así un conjunto de esquemas lineales complejo y completo, que se expresa en todos los sistemas de representación, lo cual permite inferir que, cuando el conocimiento de un campo conceptual es avanzado, esto se evidencia en todos los sistemas de representación. Esto es lógico y muestra que la posesión plena del campo exponencial deberá involucrar los diferentes SR ligados al concepto.

Etapa parcialmente no lineal

Se dice que una respuesta es parcialmente no lineal, cuando es no lineal en al menos un sistema de representación. Dos tercios de las respuestas de las cuatro implementaciones (las dos realizadas en cuarto año y las dos realizadas en quinto año) a la primera situación fueron no lineales en al menos un sistema de representación. Esta cantidad disminuye a la mitad en la segunda situación y desaparece a partir de la situación tres.

El protocolo del alumno A2, que se presenta en la figura 2, corresponde también a la respuesta de un alumno de cuarto año de la escuela secundaria argentina (15-16 años) a la situación uno. En ella, A2 calcula el dinero para los primeros tres meses mediante el cálculo recursivo del interés simple. Esta recursividad, que en realidad es el germen de una acción exponencial, le permite obtener la capitalización compuesta requerida. Así, las acciones de A2 son no lineales en el sistema de representación numérico (SRN).

En la segunda tarea, dibuja tres rectas para mostrar la variación del dinero puesto a interés y, al preguntarle qué función graficó, afirma que es una función lineal. Así, A2 es no lineal en su procedimiento de cálculo (SRN), pero lineal al graficar (SRG) y explicar qué función es (SRVE). La inconsistencia entre la respuesta en el sistema de representación numérico y los sistemas gráficos y verbal escrito de la misma situación muestra, por una parte, que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación son diferentes y, por otra parte, que los SR no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades.

El análisis de las respuestas permite inferir que los teoremas en acto que guían las acciones de A2 en cada sistema de representación son los que aparecen en el cuadro 4.

El cuadro 4 muestra que, aun cuando las proposiciones que guían la acción en los distintos sistemas de representación son contradictorias, esto no es advertido por los alumnos.

Etapa no lineal

Una respuesta se categoriza como no lineal si la respuesta es no lineal en cada uno de los sistemas de representación de la situación. Es decir, si la respuesta, sin ser exponencial, tampoco es lineal. Respuestas de esta etapa sólo están presente en algunas respuestas que alumnos de quinto año formularon a la primera situación.

El protocolo que se presenta en las figuras 3 y 4 corresponde a las respuestas que formuló el alumno A6 de quinto año de la escuela secundaria argentina (16-17 años) a la primera situación. Los alumnos de quinto año, a diferencia de los de cuarto, habían estudiado las funciones lineales, cuadráticas, polinómicas

Figura 2

A... (...; ...)

Grupo 6

10/8/2009

2

Situación 1

Un grupo de chicos tiene $12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

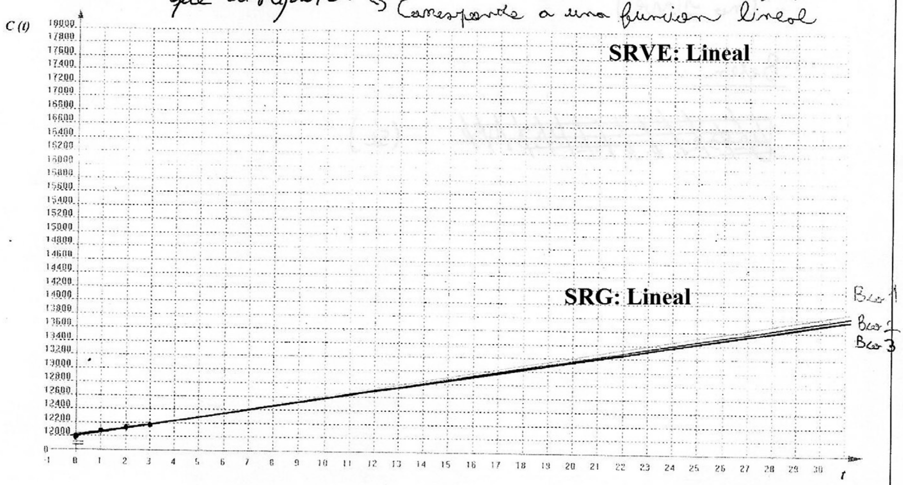
La tasa mensual del **Banco 1** es de 0,011 (1,1) y les permite tener $12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 0,012 (1,2) y les permite tener $12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 0,013 (1,3) y les permite tener $12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?

b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores. ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste? → Corresponde a una funcion lineal



Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

B)

Mes	Bco. 1	Bco. 2	Bco. 3
1	12000 . 0,011 + 12000 = 12132	12000 . 0,012 + 12000 = 12144	12000 . 0,013 + 12000 = 12156
2	12132 . 0,011 + 12000 = 12133,4	12144 . 0,012 + 12000 = 12145,7	12156 . 0,013 + 12000 =
3			SRN: No Lineal

A) los bancos multiplicaron el monto inicial que los chicos tenian por el interes que ellos les ofrecian. El resultado que les dio el interes se lo sumaron al monto inicial.

SRVE: No Lineal

Cuadro 4

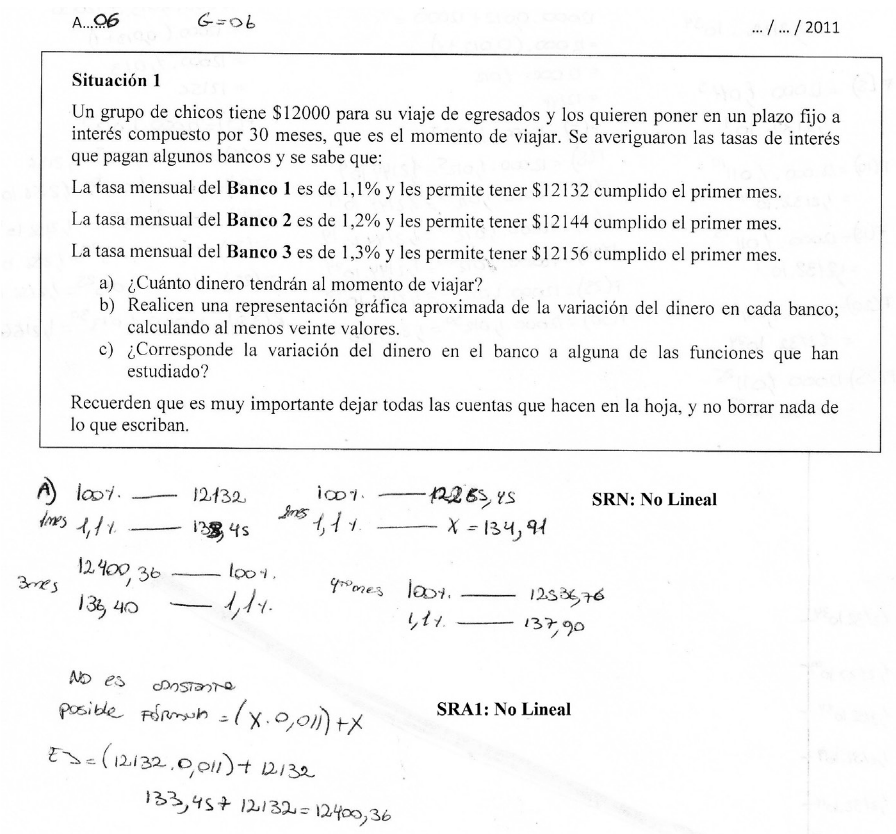
SRN	SRVE	SRG	SRVE
T.A.N: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	S.R.N: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto no se calcula de la misma forma que el interés simple"	T.A.G: "La representación gráfica del aumento del dinero puesto a IC es una recta" T.A.N: "El aumento del dinero puesto a IC es constante"	T.A.G: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto es una función lineal"
No lineal	**No lineal**	**Lineal**	**Lineal**
Parcialmente no lineal			

y racionales. Por esto, se les pidió desde la primera situación la expresión algebraica y se quitaron los ejes cartesianos. La implementación empezó también con una conversación sobre lo que era poner dinero a plazo fijo con un interés compuesto.

El alumno A6 calcula el dinero para los primeros tres meses mediante un cálculo recursivo de la regla de tres simple, lo que le permite obtener la capitalización compuesta del dinero. Esta estrategia de cálculo es el germen de una acción exponencial. Luego formula la expresión algebraica $x + (1.1\% \bullet x)$, que aparenta ser lineal, pero no lo es, pues al ser x la variación del monto inicial, la expresión es en realidad una algebrización desacertada del procedimiento de cálculo, que es no lineal. Así, aun cuando en ambos sistemas de representación (SRN y SRA1) las acciones de A6 son dirigidas por invariantes operatorios no lineales, las respuestas muestran que los SR no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades, en este caso, la escritura prealgebraica.

Acordada la expresión algebraica con el grupo de clase, los alumnos construyen las representaciones graficas. El alumno A6 construye una gráfica no lineal mediante la unión de puntos previamente calculados. Luego, afirma que la gráfica no corresponde a una función lineal. Así, este alumno ha resuelto toda la situación mediante estrategias no lineales.

Figura 3



A...06 G=06 .../.../2011

Situación 1

Un grupo de chicos tiene $12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de interés que pagan algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 1,1% y les permite tener $12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 1,2% y les permite tener $12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 1,3% y les permite tener $12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cuánto dinero tendrán al momento de viajar?
b) Realicen una representación gráfica aproximada de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos veinte valores.
c) ¿Corresponde la variación del dinero en el banco a alguna de las funciones que han estudiado?

Recuerden que es muy importante dejar todas las cuentas que hacen en la hoja, y no borrar nada de lo que escriban.

A) 100% —— 12132
1mes 1,1% —— 133,45

100% —— 12265,45
2mes 1,1% —— X = 134,91

3mes 12400,36 —— 100%
136,40 —— 1,1%

4to mes 100% —— 12536,76
1,1% —— 137,90

SRN: No Lineal

No es constante
posible fórmula = (X . 0,011) + X

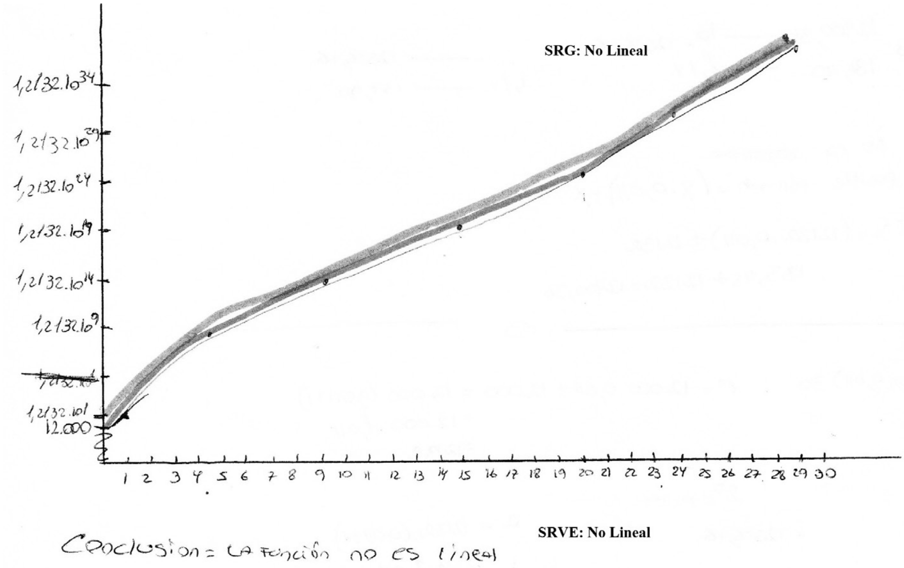
SRA1: No Lineal

E3 = (12132 . 0,011) + 12132
133,45 + 12132 = 12400,36

En el cuadro 5 se describen los teoremas en actos que parecen guiar las acciones de este alumno en cada sistema de representación.

Las resoluciones de estas etapas muestran que, tal como señala la TCC, la explicitación de los invariantes operatorios utilizados en la acción aparece más tardíamente en la conceptualización.

Figura 4



Cuadro 5

SRA1	SRN	SRG	SRVE
T.A.N: "El aumento del dinero puesto a IC se calcula sobre el monto del mes anterior"	T.A.N: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	T. A.G: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC no es una recta"	T.A.N: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto no es una función lineal"
No lineal	No lineal	No lineal	No lineal
No lineal			

Etapa parcialmente exponencial

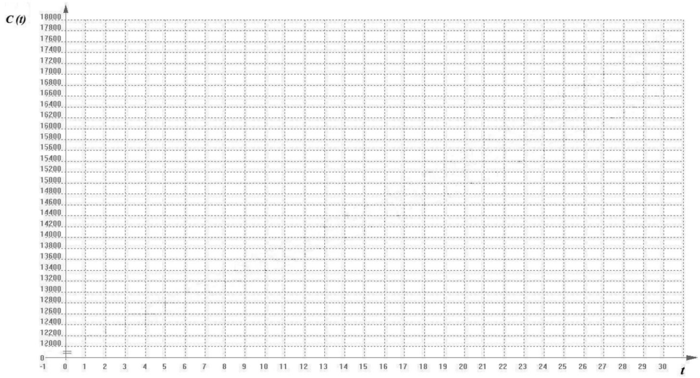
Se dice que la resolución es parcialmente exponencial si es exponencial en al menos un sistema de representación. Las primeras resoluciones parcialmente exponenciales son formuladas por alumnos de cuarto año (16-17 años) como respuesta a la segunda situación. En la situación cuatro, este tipo de resoluciones supera la mitad de las respuestas, pero desaparece en la situación cinco, donde las respuestas son totalmente exponenciales. Luego reaparece en grandes cantidades en las situaciones siete y diez. En la siete, por ejemplo, cerca de la mitad de los alumnos volvieron a dibujar gráficas no lineales, aun cuando en los sistemas de representación numérico (SRN) y algebraico de primer orden (SRA1) habían formulado respuestas exponenciales.

La segunda situación es una ampliación de la primera. En ella, se presenta la tasa de interés de los tres bancos, el dinero obtenido luego del primer mes de capitalización, y una tabla con la variación mensual del dinero en el banco 1.

Situación 2
Un grupo de chicos tiene $12 000 para su viaje de egresados y lo quiere poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento del viaje. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:
La tasa mensual del **Banco 1** es de 1.1% y les permite tener $12 132 cumplido el primer mes.
La tasa mensual del **Banco 2** es de 1.2 % y les permite tener $12 144 cumplido el primer mes.
La tasa mensual del **Banco 3** es de 1.3% y les permite tener $12 156 cumplido el primer mes.
También se ha conseguido el siguiente resumen del **Banco 1,** donde se muestra como varía el dinero para algunos meses.

Mes (t)	Monto final del periodo $C(t)$	Monto al inicio del periodo $C(t-1)$	Interés en cada periodo I $((t{-}1); t)$	Tasa $i = {}^{R}/_{100}$
0	$C(0) = 12000$	--	--	--
1	$C(1) = 12132$	$C(0) = 12000$	$I(0; 1) = 132$	0.011
2	$C(2) = 12265.452$	$C(1) = 12132$	$I(1; 2) = 133.452$	0.011
3	$C(3) = 12400.37197$	$C(2) = 12265.452$	$I(2; 3) = 134.919972$	0.011
4	$C(4) = 12536.77606$	$C(3) = 12400.37197$	$I(3; 4) = 136.4040917$	0.011
5	$C(5) = 12674.6806$	$C(4) = 12536.77606$	$I(4; 5) = 137.9045367$	0.011
6	$C(6) = 12814.10209$	$C(5) = 12674.6806$	$I(5; 6) = 139.4214866$	0.011
7	$C(7) = 12955.05721$	$C(6) = 12814.10209$	$I(6; 7) = 140.955123$	0.011
8	$C(8) = 13097.56284$	$C(7) = 12955.05721$	$I(7; 8) = 142.5056293$	0.011
9	$C(9) = 13241.63603$	$C(8) = 13097.56284$	$I(8; 9) = 144.0731912$	0.011
10	$C(10) = 13387.29403$	$C(9) = 13241.63603$	$I(9; 10) = 145.6579963$	0.011
11				
12				
…				
30				

a) Calcula los valores que faltan; y escribe la expresión que utilizó el **Banco 1** para calcular los montos $C(t)$. ¿Y los otros dos bancos?
b) Construye una tabla similar para cada uno de los bancos.
c) ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen, de cada expresión para que sea función? ¿Cuál es el banco que paga mayor interés?
d) Representa gráficamente cómo varía el dinero en cada banco.



e) ¿Cuál es la diferencia entre este modelo y el que tú habías planteado en la situación anterior?

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados se describen en el cuadro 6.

En la figura 5 se muestra la respuesta del alumno A14 de cuarto año de la escuela secundaria argentina (16-17 años). Este alumno calcula el dinero en forma no lineal con las estrategias construidas en la primera situación. Luego, formula la expresión algebraica $M_i\,(1 - i)^t = M_f$. Cuando se le pregunta cómo la construyó, el alumno afirma: "si multiplican los valores de la segunda columna, por 1.011 te da el siguiente. Por ejemplo, 1 200 por 1.011 da 12 132, y si a 12 132 lo multiplican por 1.011 da 12 265.452 y si a ese resultado lo multiplican por 1.011 les da el próximo. Entonces multiplicamos por *t*, pero como multiplicando no salía, entonces probamos con las potencias". Así, se tiene que A14 logró formalizar mediante una expresión algebraica exponencial (SRA2) un procedimiento no lineal desarrollado en el sistema de representación numérico (SRN).

Una vez acordada la expresión algebraica con el grupo de clase, se les solicitó que representaran la variación del dinero gráficamente. La figura 6 muestra que A14 propone una variación gráfica lineal del dinero puesto a interés compuesto. Así, A14 resolvió en forma no lineal en el sistema de representación

Cuadro 6

Tarea	Sistema de representación
T1: Calcula los valores que faltan, y escribe la expresión que utilizó el Banco 1 para calcular los montos C(t). ¿Y los otros dos bancos?	Numérico (SRN) Algebraico de primer orden (SRA1)
T2: Construye una tabla similar para cada uno de los bancos.	Numérico (SRN)
T3: ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen, de cada expresión para que sea función? ¿Cuál es el banco que paga mayor interés?	Algebraico de primer orden (SRA1) Verbal escrito (SRVE)
T4: Representa gráficamente cómo varía el dinero en cada banco.	Gráfico (SRG)
T5: ¿Cuál es la diferencia entre este modelo y el que tú habías planteado en la situación anterior?	Verbal escrito (SRVE)

numérico (SRN), exponencial en el sistema de representación algebraico de segundo orden (SRA2) y lineal en el sistema de representación gráfico (SRG).

En síntesis, aun cuando A14 logró formalizar la expresión algebraica exponencial, no modificó la representación gráfica. Por una parte, esto muestra que comprender un problema en un sistema de representación y poder resolverlo no implica su comprensión en otro. Por otra parte, muestra que los acuerdos establecidos en dicho sistema de representación no son inmediatamente reinterpretados en otro sistema de representación, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente.

En el cuadro 7 se enuncian los teoremas en acto que parecen dirigir las acciones de A14 en cada sistema de representación. Esto permite inferir que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación (SR) son diferentes y contradictorios entre sí. Así, se infiere que, al principio, coexisten esquemas contradictorios entre sí para el mismo concepto. Esto también muestra la fuerza que tienen los esquemas lineales en el momento de generar la respuesta a una situación nueva.

El análisis de las respuestas parcialmente exponenciales muestra que la conceptualización de la función exponencial involucra tanto el desarrollo

Figura 5

A14..N ... /... /2009

Ma = mes anterior

Situación 2

Un grupo de chicos tiene $12000 para su viaje de egresados y lo quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento del viaje. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 1,1% y les permite tener $12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 1,2 % y les permite tener $12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 1,3% y les permite tener $12156 cumplido el primer mes.

También se ha conseguido el siguiente resumen del **Banco 1**, donde se muestra como varía el dinero para algunos meses.

$(M_a \cdot i) + M_a = M_F$

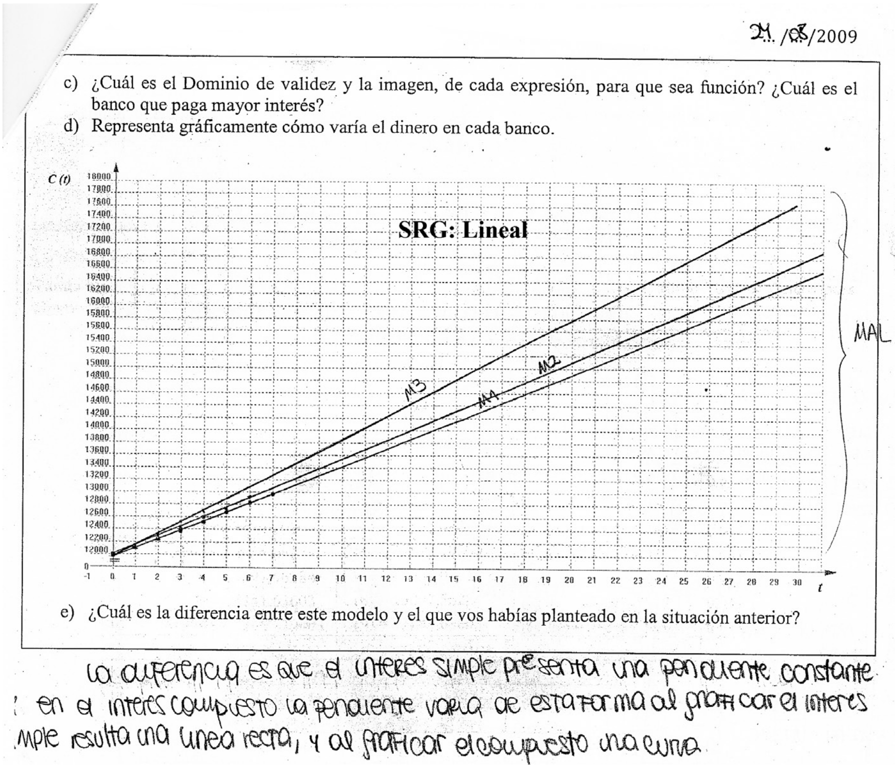
Mes (t)	Monto final del periodo C (t)	Monto al inicio del periodo C (t - 1)	Interés en cada periodo I ((t-1); t)	Tasa i = R/100
0	C(0) = 12000	--	--	--
1	C(1) = 12132	C(0) = 12000	I (0; 1) = 132	0,011
2	C(2) = 12265,452	C(1) = 12132	I (1; 2) = 133,452	0,011
3	C(3) = 12400,37197	C(2) = 12265,452	I (2; 3) = 134,919972	0,011
4	C(4) = 12536,77606	C(3) = 12400,37197	I (3; 4) = 136,4040917	0,011
5	C(5) = 12674,6806	C(4) = 12536,77606	I (4; 5) = 137,9045367	0,011
6	C(6) = 12814,10209	C(5) = 12674,6806	I (5; 6) = 139,4214866	0,011
7	C(7) = 12955,05721	C(6) = 12814,10209	I (6; 7) = 140,955123	0,011
8	C(8) = 13097,56284	C(7) = 12955,05721	I (7; 8) = 142,5056293	0,011
9	C(9) = 13241,63603	C(8) = 13097,56284	I (8; 9) = 144,0731912	0,011
10	C(10) = 13387,29403	C(9) = 13241,63603	I (9; 10) = 145,6579963	0,011
11	C(11)=13524,55426	C(10)=13387,29403		
12	C(12)=13683,43136	C(11)=13524,55426		
13	C(13)=13883,95214	C(12)=13683,43136		
14	C(14)=13986,12561	C(13)=13883,95214	**SRN: No Lineal**	
15	C(15)=14139,97299	C(14)=13986,		
16	C(16)=14295,51269	C(15)=		
17	C(17)=14452,76333	C(16)=		
18	C(18)=14611,74373	C(17)=		
19	C(19)=14772,47291	C(18)=		
20	C(20) = 14934,97011	C(19) = 14772,47291	I (19; 20) = 162,497202	0,011
21	C(21) = 15099,25478	C(20) = 14934,97011	I (20; 21) = 164,2846712	0,011
22	C(22) = 15265,34659	C(21) = 15099,25478	I (21; 22) = 166,0918026	0,011
23	C(23) = 15433,2654	C(22) = 15265,34659	I (22; 23) = 167,9188125	0,011
24	C(24) = 15603,03132	C(23) = 15433,2654	I (23; 24) = 169,7659194	0,011
25	C(25) = 15774,66466	C(24) = 15603,03132	I (24; 25) = 171,6333445	0,011
26	C(26) = 15948,18597	C(25) = 15774,66466	I (25; 26) = 173,5213113	0,011
27	C(27) = 16123,61602	C(26) = 15948,18597	I (26; 27) = 175,4300457	0,011
28				
29				
30				

a) Calcula los valores que faltan; y escribe la expresión que utilizó el **Banco 1** para calcular los montos C(t). ¿Y los otros dos bancos?

b) Construye una tabla similar para cada uno de los bancos. **SRA1: Exponencial**

$M_i \cdot (1+i)^t = M_F$

Figura 6



conjunto de los sistemas de representación como el desarrollo en cada uno de ellos, y esto está íntimamente vinculado con las tareas que se les proponen a los alumnos en cada sistema de representación.

Etapa exponencial

Refiere a las resoluciones que son exponenciales en todos los sistemas de representación. Las resoluciones vinculadas al interés compuesto, por ser un caso particular de función exponencial, son también exponenciales. Este tipo de respuestas aparece por primera vez en la situación cuatro y se generaliza en la situación cinco, pero sin estabilizarse.

Cuadro 7

SRN	SRA1	SRVE	SRVE
T.A.N: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	T.A.N: "Si a cada monto lo multiplicamos por 1.011 obtenemos el próximo resultado"	T.A.G: "Es posible unir dos puntos mediante un segmento recto" T.A.G: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC no es una recta"	T.A.N: "El aumento del dinero puesto a IC se grafica mediante una curva no recta"
No lineal	**Exponencial**	**Lineal**	**No lineal**
Parcialmente exponencial			

La situación cuatro refería a un problema vinculado con la gripe AH1N1. El problema presentaba una situación en la que tres personas que habían contraído gripe, contagiaban a cinco personas cada hora.

Situación 4

El virus de influenza humana "AH1N1" o gripe porcina se contagia por contacto. Al darse la mano o besarse en la mejilla; y por la nariz, boca y ojos. Tres amigos contrajeron el virus en una fiesta y contagiaron a más personas. Sabiendo que la expansión se produjo de la siguiente manera:

Cada amigo contagió 5 personas la primera hora, y cada una de estas personas contagió otras 5 para la segunda hora. Luego, cada una de estas personas contagió 5 para la tercera hora, y esta situación se repitió en cada persona contagiada.

a) ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados, en una cierta hora cualquiera?
b) Construye, una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora; para las primeras 24 hs.
c) ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar que pasaría?
d) Determina para cada caso, el dominio de validez y la imagen para que sean funciones; y represéntalas gráficamente.

(*) No es un modelo epidemiológico exacto, sino simplificado.

Cuadro 8

Tarea	Sistema de representación
T1: ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados en una cierta hora cualquiera?	Algebraico de primer orden (SRA1)
T2: Construye una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora para las primeras 24 hs.	Numérico (SRN)
T3: ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar qué pasaría?	Algebraico de primer orden (SRA1) Verbal escrito (SRVE)
T4: Determina para cada caso el dominio de validez y la imagen para que sean funciones y represéntalas gráficamente.	Algebraico de primer orden (SRA1) Gráfico (SRG)

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados en cada una de ellas, se describen en el cuadro 8.

En la figura 7 se presenta la resolución a la cuarta situación del alumno A22. En el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1), formula una sucesión de expresiones que procuran dar respuesta al problema planteado, pero sin lograrlo.

Una vez acordada con el grupo de clase la expresión algebraica que permitiría calcular la cantidad de personas que se contagiaban por hora, A22 calcula algunos valores y construye la representación gráfica. En ambos casos las respuestas son exponenciales. Así, se tiene que A22 reconoce la función exponencial en el sistema de representación numérico (SRN) como la función que no aumenta lo mismo entre cualquier x y $x + 1$, y en el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1) como la expresión de la forma: $f(x) = ka_x$. Así, todas las resoluciones parecen estar guiadas por invariantes operatorios exponenciales.

En el cuadro 9 se describen los teoremas en acto que parecen dirigir la acción de A22 en cada sistema de representación. El cuadro 9 muestra que este alumno ha logrado extender sus esquemas lineales en una dirección no lineal primero, y ahora exponencial.

Figura 7

A.22. **A22** 27/08/ 2009

Situación 4

El virus de influenza humana "AH1N1" o gripe porcina se contagia por contacto. Al darse la mano o besarse en la mejilla; y por la nariz, boca y ojos. Tres amigos contrajeron el virus en una fiesta y contagiaron a más personas. Sabiendo que la expansión se produjo de la siguiente manera:

Cada amigo contagió 5 personas la primera hora, y cada una de estas personas contagió otras 5 para la segunda hora. Luego, cada una de estas personas contagió 5 para la tercera hora, y esta situación se repitió en cada persona contagiada.

a) ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados, en una cierta hora cualquiera?
b) Construye, una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora; para las primeras 24 hs.
c) ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar que pasaría?
d) Determina para cada caso, el dominio de validez y la imagen para que sean funciones; y represéntalas gráficamente.

(*) No es un modelo epidemiológico exacto, sino simplificado.

a)- ~~3.5^t~~ ~~$y=5^t$~~ ~~3.5^t~~

$3.5^t - 5.t$

$3.5^t - 3.5^{t-1}$

~~1 Hs = 3+(3.5)~~
~~2 Hs = 3+(3.5).5 =~~
~~3 Hs = 3+(3.5).5.5~~
~~4 Hs = 3+(3.5).5.5.5~~

SRA1: Exponencial

Hora (t)	cantidad de Infectados	Nuevos contagiados
0	3	0
1	18	15
2	93	75
3	468	375
4	2343	1875
5	11718	9375

SRN: Exponencial

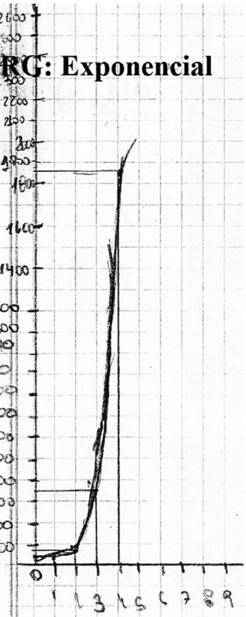
~~$= 3.5^{A3}$~~
~~$= 03 + 44$~~

c) $C(t) = 2.6^t$

Pizarrón:

d)- 3.5^t -> Dominio = $[0; +\infty)$ $[0; 24]$
Imagen = $[3; +\infty)$ $[3; 1{,}788139343 \times 10^{17}]$

- 2.6^t -> Dominio $[0; +\infty)$
Imagen $[2; +\infty)$



SRG: Exponencial

$C(t) = 3.5^t$

$C(t) = 2.6^t$

Cuadro 9

SRN	SRG	SRA1
T.A.N: "El aumento se calcula sobre la cantidad de personas contagiadas la hora anterior"	T.A.G: "La representación gráfica del aumento de la cantidad de personas contagiadas es una curva creciente"	T.A.N: "El aumento se calcula sobre la cantidad de personas contagiadas la hora anterior" T.A.A1: "La expresión algebraica es: $f(t) = k \bullet a^t$. Donde t es la hora para la cual se quiere saber la cantidad de contagiados; a es la tasa de crecimiento y k la cantidad inicial de personas contagiadas"
Exponencial	**Exponencial**	**Exponencial**
	Exponencial	

El análisis de los protocolos muestra que la conceptualización de la función exponencial es una tarea compleja que no se realiza en todos los sistemas de representación a la vez y que demanda mucho más que los dos meses y medio que demandó la implementación, sobre todo si se quiere llegar a que, en el proceso de explicitación de los invariantes operatorios (Vergnaud, 2007b, p. 299), los alumnos dominen el nivel que Vergnaud llama de formalización.

CONCLUSIONES

La conceptualización es más que la forma predicativa del conocimiento o que el conocimiento explicitable (Vergnaud, 2007b, p. 299), pero puesto que en la escuela secundaria, la explicitación y formalización de los conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación cobra vital importancia, el aspecto central de este trabajo ha sido caracterizar el proceso de conceptualización de la función exponencial y su relación con los sistemas de representación, sobre todo en un contexto escolar, a partir de la forma predicativa del conocimiento. La caracterización realizada a partir de la base empírica (el estudio de 115 alumnos durante el periodo en que éstos estudiaban las funciones exponenciales) permite sugerir la existencia de una progresividad en la conceptualización, que va desde los esquemas lineales hasta los exponenciales, de la función exponencial vinculada con los sistemas de representación. Las etapas son las siguientes:

Lineal: son lineales aquellas producciones que involucran todos los sistemas de representación lineales. Este tipo de resolución evidencia un sistema de esquemas lineales complejo y completo que se expresa en todos los sistemas de representación. Esto muestra que, cuando el estudiante sólo está en posesión de esquemas lineales, los utiliza coherentemente en todos los sistemas de representación.

Parcialmente no lineal: la respuesta es parcialmente no lineal cuando la resolución es no lineal en al menos un sistema de representación y lineal en el resto. La inconsistencia entre las respuestas dadas en sistemas diferentes de representación muestra que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación son diferentes y contradictorios entre sí. Así, se infiere que, al principio, coexisten esquemas contradictorios entre sí para el mismo concepto. Esto también muestra la fuerza que tienen los esquemas lineales en el momento de generar la respuesta a una situación nueva.

No lineal: la respuesta es no lineal cuando es no lineal en todos los sistemas de representación, pero no es todavía una respuesta exponencial. Por ejemplo, en el sistema de representación gráfico (SRG) la respuesta no es una recta, pero tampoco es una curva estrictamente creciente. En el sistema de representación algebraico, la fórmula no es una función lineal, pero tampoco es exponencial; etc. La interacción con el profesor y el grupo de clase resultó fundamental a la hora de avanzar sobre estas estrategias.

Parcialmente exponencial: son parcialmente exponenciales aquellas respuestas que son exponenciales en al menos un sistema de representación, pero no exponenciales en el resto. Por una parte, el análisis de estas respuestas muestra que, en un principio, las ideas exponenciales y no exponenciales coexisten. Por otra parte, muestra que comprender un problema en un sistema de representación y poder resolverlo no implica su comprensión en otro. Esto se evidencia en que, aun estableciendo acuerdos en un sistema de representación como por ejemplo la fórmula de la función exponencial, éstos no son inmediatamente reinterpretados en otro sistema de representación, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente. En síntesis, los sistemas de representación no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades.

Exponencial: las respuestas son exponenciales cuando son explícitamente exponenciales en todos los sistemas de representación. Este tipo de respuestas aparece por primera vez en la situación cuatro, pero sin estabilizarse, pues en el sistema de representación donde los alumnos no tenían seguridad de la respuesta retomaban estrategias no exponenciales. La aparición tardía de este tipo de resoluciones y las dificultades que presenta su estabilización resaltan la complejidad del proceso de conceptualización de variaciones no lineales en general, y de la función exponencial en particular, en la escuela secundaria. En esta etapa los alumnos logran diferenciar una función exponencial de una que no lo es en los cuatro sistemas de representación (SRN, SRA1, SRG y SRVE). En el sistema de representación numérico (SRN), como la función que no aumenta lo mismo entre cualquier x y $x + 1$. En el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1), como la expresión de la forma: $f(x) = k \bullet a^x + b$. En el sistema de representación verbal escrito (SRVE), como la función que tiene la variable independiente en el exponente, y en el sistema de representación gráfico (SRG), como la función cuya representación gráfica posee una asíntota horizontal y es una curva no recta, creciente (o decreciente) en todo el dominio.

Así, y aunque este trabajo no permite afirmar si el proceso de conceptualización particular de cada alumno transita necesariamente por cada una de las etapas, sí se ha encontrado que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos en cada sistema de representación resulta un aspecto central de la transición entre lo lineal y lo exponencial, y que este proceso se encuentra íntimamente vinculado con las tareas que se les proponen a los alumnos en cada sistema de representación. En esta dirección resta estudiar cómo se desarrolla el proceso de conceptualización en cada sistema de representación y cómo se desarrolla la vinculación entre ellos en la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Bock, D., L.Verschaffel y D. Janssens (1998), "The Predominance of the Linear Model in Secondary School Pupils' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 35, núm. 1, pp. 65-83.

___________ (2002), "Improper Use of Linear Reasoning: An in-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 50, núm. 3, pp. 311-334.

De Bock, D., W. van Doorem, D. Janssens y L. Verschaffel (2002), "The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 4, núm. 1, pp. 65-89.

De Bock, D., W. van Dooren y L. Verschaffel (2011), "Students' Over-use of Linearity: An Exploration in Physics", *Research in Science Education*, vol. 41, núm. 3, pp. 389-412.

Douady, R. (1986), "Jeux de cadres et dialectique outil-object", *Recherches en Didactique des Mathémathiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 5-31.

Dubinsky, E. y G. Harel (eds.) (1992), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Notes 25, MAA.

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.

Font, V. (2001), "Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola", *Revista EMA*, vol. 6, núm. 2, pp. 180-200.

García, M. y S. Llinares (1994), "Algunos referentes para analizar tareas matemáticas", *Suma*, núm. 18, pp. 13-23.

Janvier, C. (1987), "Translation Processes in Mathematics Education", en C. Janvier, (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey, Estados Unidos, Lawrence Erlbaum, pp. 27-32.

Kaput, J. (1987), "Representation systems and mathematics", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, New Jersey, Estados Unidos, Lawrence Erlbaum, pp. 19-26.

Karrer, M. y S. Magina (2000), "Uma sequencia de ensino para a introdução de logaritmo: estudo exploratório usando a calculadora", *Boletim de Educação Matemática*, vol. 13, núm. 14, pp. 18-31.

Rico, L. (2009), "Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática", PNA, vol. 4, núm. 1, pp. 1-14 (consultado el 21 del junio de 2013 en http://hdl.handle.net/10481/3501).

Sessa C. y D. Vilotta (2008), "Un espacio para discutir en el aula propiedades y dominio de validez de la función exponencial", en *II Reunión Pampena de Educación Matemática*, Santa Rosa, La Pampa, Argentina, pp. 123-134.

Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núms. 2/3, pp. 133-170.

___________ (1996), "Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica", *Revista Perspectivas*, vol. 26, núm. 1, pp. 195-207.

___________ (2007a), "Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento", en M. R. Otero, I. Elichirebehety, M. Fanaro, A. Corica y P. Sureda (eds.), *Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina.

___________ (2007b), "¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?), *Investigações em Ensino de Ciências*, vol. 12, núm. 2, pp. 285-302.

___________ (2011), "La construcción de la racionalidad", en M. R. Otero, I. Elichirebehety y M. Fanaro (eds.), *I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, pp. 268-274.

Villarreal, M. E., C. B. Esteley y H. R. Alagia (2005), "As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares", BOLEMA - *Boletim de Educação Matemática*, vol. 18, núm. 23, pp. 23-40.

DATOS DE LAS AUTORAS

Patricia Sureda
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
psureda@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
rotero@exa.unicen.edu.ar

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal

Tulio R. Amaya de Armas y Antonio Medina Rivilla

Resumen: En este trabajo se exploran las dificultades presentadas por 50 estudiantes colombianos del grado once –grado escolar que antecede al ingreso a la universidad– al hacer conversiones entre diferentes registros de representación de una función. La investigación fue desarrollada en tres etapas: revisión documental, diseño de instrumentos y exploración, y análisis e interpretación de resultados. En ella se presentaron seis situaciones problema a los estudiantes, pero aquí sólo se analizan los resultados correspondientes a uno de dichos problemas. Se encontraron serias dificultades relacionadas con: el reconocimiento de los elementos de una función y cómo se relacionan éstos; el establecimiento de congruencias entre los elementos de dos o más registros; el tránsito al interior de un registro, y la complejidad intrínseca del propio concepto.

Palabras clave: registro figural, registro analítico, representación semiótica, función, conversión entre registros.

Abstract: The present research explores the difficulties encountered by 50 Colombians students in 11th grade –the school grade before the admission to the university– in their transit across different function representation registers. The research has been developed in three stages: literature review, tools' design and exploration, and results analysis and interpretation. It introduced six situations problems to students, but we only analyze the results for each of these problems. Serious difficulties were encountered relating to function elements recognition and their relationship, the establishment of congruence between the elements

Fecha de recepción: 11 de febrero de 2013; fecha de aceptación: 27 de junio de 2013.

of two or more registers, the transit into a register, and the intrinsic complexity of the concept itself.

Keywords: registration figural, analytical register, semiotic representation, function, conversion between register.

INTRODUCCIÓN

Los trabajos que involucran funciones resultan problemáticos para estudiantes de diferentes niveles (Nájera, 2008); sin embargo, brindan una gran oportunidad para explorar diferentes representaciones del mismo objeto en un mismo ambiente, lo que facilita su estudio. Por tanto, "hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc." (Font, Godino y D'Amore, 2007, p. 1).

En este marco, el trabajo con situaciones contextualizadas que involucran funciones aparece como una alternativa que, por una parte, facilita hacer transformaciones de tipo conversión (hacer transformaciones al cambiar de registro) y/o de tipo tratamiento (hacer transformaciones sin cambiar de registro), y por otra, permite relacionar los elementos de los registros involucrados y asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras (Amaya y Gulfo, 2009). Lo anterior facilita el estudio de funciones, y éste se potencia si se realiza en un ambiente natural de camaradería y cooperación mutua.

Este trabajo nace del análisis de la teoría de Duval (1999, 2004), lo propuesto en los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2005), frente a resultados de investigación sobre dificultades de los estudiantes al hacer el tránsito entre diferentes registros de representación de una función (Dolores, 2004; Gatica, Maz-Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo, 2010; Hitt, 2000, 2003) y sobre el abordaje de tal concepto por parte de los estudiantes. Dichos resultados ponen en evidencia una descompensación al identificar y luego relacionar los elementos de una representación en uno o varios registros, lo que podría impedir el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo (Hitt, 2003).

La falta de asociación por parte de los estudiantes del contenido de dos o más registros puede resultar problemático al considerar la importancia de las representaciones semióticas como medio de acceso al conocimiento matemático, para el cual se requiere la integración sinérgica entre dos o más registros

(Duval, 2004). Esta falta de asociación también puede impedir la comprensión de conceptos como el de función, el cual prepara a los estudiantes para conceptualizar el límite, la continuidad, la derivada y la integral definida como límite de una suma (MEN, 2005). Por lo anterior, cobra importancia el análisis de las dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje de situaciones problema que involucren funciones como elemento para la implementación de estrategias que faciliten la comprensión de este concepto.

A partir del contexto descrito y de la relevancia de las representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la investigación se orientó con la siguiente pregunta: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes del grado once al hacer transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre registros de representación de una función? En este artículo sólo se presenta el análisis de uno de los problemas planteados en ella.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se parte del hecho de que la actividad matemática suscita en muchos alumnos dificultades de aprendizaje que no se encuentran en otras áreas del conocimiento, quizás porque la actividad matemática requiere un modo del funcionamiento cognitivo, especificado por el papel central que desempeñan las representaciones semióticas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos y del cual los alumnos deben tomar conciencia (Duval, 2012).

El recurso a las representaciones semióticas en el aprendizaje en educación matemática es inevitable. Duval (1999) considera que no hay noesis sin semiosis, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, sobre todo en matemáticas por cuanto "el acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente mediante la producción de representaciones semióticas" (Duval, 2012, p. 15). Lo anterior permite establecer lo fundamental de este concepto y su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En otras palabras, si el trabajo de establecer congruencias entre los elementos de un concepto matemático al hacer el tránsito entre diferentes registros de éste es la única forma de comprenderlo, entonces es necesario hacerlo.

Un sistema semiótico de representación es una manera de materializar una idea, de expresar externamente un concepto. Para Duval (1999), un sistema semiótico de representación es un registro de representación si permite las siguientes actividades cognitivas asociadas a la semiosis: *1)* la presencia de una representación identificable; *2)* el tratamiento de una representación, que es la transformación dentro del propio registro en el que ha sido formada, y *3)* la conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Conforme a los planteamientos de Duval (1999), los registros de representación se pueden entender como un medio de expresión caracterizado por signos que le son propios y por formas de organización y tratamiento que también le son propias.

Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas, o sea, que el contenido de una representación en un registro dado puede resultar diferente al contenido de esa representación en otro registro, por lo que es necesario tener en cuenta esta heterogeneidad si se quiere que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos.

Duval considera que los fenómenos de congruencia y no congruencia merecen una especial atención porque son en sí mismos dificultades intrínsecas de la conversión, y ésta es condición necesaria para la conceptualización, porque "la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros" (Duval, 2012, p. 16). Esto es, la actividad matemática requiere una coordinación interna que ha de ser construida entre los diversos registros de representación que puedan ser elegidos y usados. Sin esta coordinación, dos representaciones diferentes significan dos objetos diferentes sin ninguna relación entre sí.

Una conversión puede ser congruente en un sentido y no serlo en el otro (Duval, 2004), es decir, se pueden encontrar fácilmente elementos en el registro de llegada que correspondan a elementos en el registro de partida y no encontrarlos en el sentido contrario; estas incongruencias son muy comunes en conversiones que involucran el registro algebraico.

De lo anterior, puede deducirse que el análisis de las diferentes representaciones de un objeto matemático y de las interacciones entre éstas podría propiciar el éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas. Éste es un asunto de suma importancia pues, como se ha venido argumentando, la posibilidad de movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación dada es esencial.

Para tener acceso a cualquier conocimiento matemático, Duval (2004) considera que se deben conectar por lo menos dos de los sistemas de representación del objeto que se aprende, por lo que la adquisición de un concepto en un individuo se dará en el momento en que haya una coordinación libre de contradicciones entre las diferentes representaciones del objeto representado (Hitt, 2000).

Lo anterior implica que, en el marco de la teoría de Duval, la comprensión integral de un concepto se basa en la coordinación de al menos dos registros de representación de dicho concepto. Coordinación que se manifiesta mediante el uso rápido y espontáneo de la conversión cognitiva, es decir, del reconocimiento de un mismo elemento en diferentes registros de representación del objeto estudiado (Gatica *et al.*, 2010). Por tanto, se necesita cierta congruencia entre las representaciones estudiadas para que al aprendiz se le facilite la identificación de un mismo elemento en un registro de partida y en otro de llegada y sea capaz de movilizarlo dentro del registro en que se esté trabajando.

El docente de matemáticas, en su función de orientador y facilitador de ambientes de aprendizaje con la sola actividad de hacer conversiones o tratamientos, puede propiciar que los estudiantes logren avances significativos en su formación matemática. Esta formación ha preocupado en los últimos años a educadores matemáticos e investigadores en educación matemática, cuyos resultados de indagación ofrecen una visión de las matemáticas y su enseñanza y unos recursos educativos que pueden guiar a docentes de matemáticas a conseguir por lo menos los niveles mínimos de desempeño de los estudiantes. En este sentido, el National Council of Teachers of Mathematics (2000, citado en Godino, Batanero y Font, 2003, p. 105) sugiere:

- Comprometer a los estudiantes en tareas que impliquen la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación.
- Comprometer a los estudiantes en el discurso matemático que amplía su comprensión de la resolución de problemas y su capacidad para razonar y comunicarse matemáticamente.
- Aplicar transformaciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.

En Colombia, el MEN (2005) considera que:

> El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra,

> y con los distintos tipos de modelos funcionales [...] Y uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos para el aprendizaje con sentido del cálculo. El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente.
>
> Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula [...] Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica, es muy apropiado analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia, intentar generalizarlas; estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica (p. 67).

De lo planteado por el MEN (2005), se deducen las múltiples relaciones que pueden derivarse entre la producción de patrones de variación, el proceso de modelación y muy particularmente el estudio de las nociones de variable y función, como las perspectivas más adecuadas para utilizar el registro figural, el algebraico, el geométrico, el analítico y el del lenguaje materno como andamios para el acceso al cálculo en la Educación Media.

Por otro lado, uno de los tópicos de mayor importancia en cualquier proceso de aprendizaje que se pretenda lo constituyen los errores cometidos por los estudiantes, por lo que la necesidad de analizarlos es evidente. "Esto permite determinar los medios para corregirlos y concientizar al estudiante de que los comete, y así convertirlos en un medio en el proceso de construcción del conocimiento" (Vergnaud, 1991, citado en Carrión, 2007, p. 19).

Brousseau (1999) sostiene que el error y el fracaso no tienen el papel simplista que a veces se les quiere hacer representar. Brousseau considera que:

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino que es el efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, su éxito y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado (p. 3).

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede deducir que los errores son imprescindibles a la hora de retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de mejorar los resultados del aprendizaje de los estudiantes. Además, los errores parecen ser connaturales de cualquier proceso matemático, en particular de los procesos asociados a las transformaciones de representaciones de una función.

Carrión (2007) considera que "todo proceso de instrucción potencia la generación de errores" (p. 20), y clasifica en tres tipos los cometidos al operar expresiones algebraicas:

1) Errores de entrada, en éstos los estudiantes, aunque realizan los cálculos de manera correcta, operan una expresión diferente a la que se les propone, es decir, eligen el proceso correcto, pero presentan errores en su proceso de solución, por ejemplo, cambiar los términos de las expresiones o alterar el uso de los paréntesis o inventar números que no están en la expresión. Estos errores por lo general conducen a resultados incorrectos.
2) Errores de operación, en los que los estudiantes distorsionan el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada de manera independiente por mal uso de las operaciones o de los signos.
3) Errores de escritura que se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión, aunque se escojan las operaciones adecuadas y éstas se realicen correctamente. En los errores de este tipo, el estudiante realiza los cálculos secuencialmente sin cometer errores en la ejecución de las operaciones y es muy común que se obtengan resultados correctos.

METODOLOGÍA

En este trabajo se analizan las dificultades presentadas por los estudiantes del grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función, partiendo del registro figural como registro principal. Se hizo un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010) con un enfoque empírico cualitativo. El estudiante debía identificar el contenido de la representación figural de una función y hacer conversiones o tratamientos. Aquí se analizan las dificultades de comprensión invocando sus concepciones, esto es, los errores conceptuales al hacer transformaciones en el registro principal o desde éste hacia otro registro solicitado.

El estudio fue desarrollado en tres etapas:

- *Revisión documental:* se buscaron bases para el análisis de las dificultades de los estudiantes con el concepto de función, ya fuera por transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento.
- *Diseño y exploración del instrumento:* se elaboró un instrumento tipo cuestionario, compuesto por algunas indicaciones por escrito y una hoja de papel en blanco. Se partió de una representación en el registro figural como registro principal, se pidió hacer algunas transformaciones tipo tratamiento y tipo conversión para observar si las variaciones en el registro principal eran percibidas como tales en el registro de llegada y analizar las dificultades que presentaran los estudiantes al hacer la transformación. La validación del cuestionario se realizó a través de pares del área de matemáticas y un pilotaje aplicado a ocho estudiantes. El cuestionario se aplicó a todos los estudiantes luego de algunos ajustes buscando claridad y adecuación en el tiempo de solución.
- *Análisis e interpretación de resultados:* se hizo el análisis de las resoluciones de los estudiantes, teniendo en cuenta las categorías de análisis previas que se presentan en el cuadro 1 y las inductivas producto de las variaciones en las respuestas como resultado de la gran variedad de éstas a cada una de las cuestiones planteadas (Andréu, 2001). Se tuvo en cuenta también si las dificultades se dieron al hacer conversiones o tratamientos.

Se reitera, respecto de la metodología, que en este artículo sólo se analizaron las respuestas a un único problema, el cual se presenta más adelante.

Categorías de análisis

Se establecieron como unidades de análisis los resultados de las resoluciones de los estudiantes a las diez cuestiones que se les plantearon en el cuestionario. Las categorías de análisis previas se obtuvieron al enlistar los indicadores que permitieran determinar la relación de la situación funcional con el contexto sociocultural de los estudiantes y analizar cuáles de ellos se prestaban más para contextualizarlos por medio de preguntas en la situación planteada. Se seleccionaron los siguientes indicadores: reconocer los elementos de la situación funcional en el registro figural; identificar cómo se relacionan éstos; modelar la situación funcional; encontrar un patrón de regularidad y crecimiento; utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita y describir los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas.

Las categorías de análisis resultaron de las diferentes variantes en las respuestas dadas a cada una de las cuestiones planteadas y se fueron deduciendo paso a paso (Andréu, 2001). La relación establecida entre los elementos de la función obedeció más a la interconexión de los conceptos involucrados en las perspectivas de la situación propuesta que a la suma de éstos para englobar la función como un todo.

Participantes

La población objeto de estudio la constituyó un grupo de 50 estudiantes de undécimo grado de la media académica de una institución educativa de carácter oficial de Sincelejo, Colombia, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo de fin de bachillerato. Ellos ya habían estudiado conceptos básicos de funciones en dos cursos previos y al comienzo del curso durante el cual se desarrolló la investigación.

Instrumento

Por parte del docente que impartía el curso, a cada estudiante del grupo se le entregó una hoja de papel de área A y se les dio la siguiente instrucción: la hoja de papel se corta por la mitad y una de las dos mitades se aparta, el pedazo que queda se corta también por la mitad, uno de los dos pedazos se aparta y

Cuadro 1 Categorías de análisis y modelo del tipo de preguntas planteadas a los estudiantes en cada situación

Núm.	Categorías de análisis	Tipo de preguntas o cuestiones planteadas
1	Identificación de los elementos de una función	¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuál es el área total de los pedazos apartados después de un corte *n* cualquiera? ¿Es posible terminar este proceso? ¿En qué corte? ¿Cuántos cortes es posible hacer?
2	Relación entre los elementos de una función	¿Cuáles de las cantidades varían y cuáles permanecen fijas (constantes)? ¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?
3	Modelación de una situación funcional	Encuentra una expresión matemática (una fórmula) que modele esta situación.
4	Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función	¿Cuál es el área de los pedazos cortados en los cortes 6, 12, 15, 20 y 30?
5	Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita	Si el área total de los pedazos apartados es $\frac{1023A}{1024}$, ¿en qué corte estamos?
6	Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	Describe el proceso que seguiste para responder la pregunta *k*.

así sucesivamente. En seguida se muestran dos secuencias con las áreas de los pedazos cortados y apartados hasta el cuarto corte (véase la figura 1).

Para el diseño de la situación, se pusieron en juego los registros geométrico, aritmético, algebraico y del lenguaje materno, cada uno con sus propias

Figura 1 Secuencias presentadas a los estudiantes

Corte	1	2	3	4
Área del pedazo cortado	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{8}$	$\frac{A}{16}$
Área total de los pedazos apartados	$\frac{A}{2}$	$\frac{3A}{4}$	$\frac{7A}{8}$	$\frac{15A}{16}$

reglas y procedimientos; de manera que por medio de las propiedades de uno se reconocieran y pudieran trabajar las del otro o, de otro modo, que con las contribuciones de cada uno se aportara al logro de los propósitos de la tarea. Con el diseño de la situación y su implementación se pretendió el análisis de dificultades de los estudiantes con nociones como variable, dependencia, incógnita, ecuación, dominio, rango, secuencias, patrón de regularidad, modelación y concepción de infinito.

En cada ítem se trató de involucrar algún elemento de la función. El estudiante debía identificarlo y tratar de encontrarle una representación en otro o en el mismo registro. Se buscaba analizar las dificultades del estudiante en el abordaje que hacía de cada elemento al tratar de dar una respuesta. Por ejemplo, al darles el valor de la función en un corte determinado y pedirles que determinaran el corte en que se estaba, se involucró el concepto de incógnita y, en su proceso de solución, se esperaba que el estudiante pudiera identificar los elementos de la secuencia en la representación figural y lograra coordinarlos con elementos congruentes en alguno de dos registros: haciendo una conversión al registro algebraico mediante el concepto de ecuación, o también por conversión al registro analítico aritmético resolviéndolo por tanteo.

Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. Se observó cuidadosamente a los estudiantes mientras solucionaban el cuestionario, atendiendo cualquier dificultad con la prueba. Se entrevistó sólo a aquellos estudiantes cuyos resultados presentaron interpretación dudosa o resultaron de interés. Las entrevistas se hicieron tomando como base las preguntas del cuestionario. El trabajo se realizó durante el segundo semestre de 2012, se aplicaron seis cuestionarios, aquí se presentan sólo los resultados de la situación en la que se tomó el registro figural como registro principal.

Finalmente, se pidió a los estudiantes que se organizaran en grupos de tres o cuatro, según sus propias preferencias. Organizados de esta manera discutían las respuestas que cada miembro del grupo había dado a la situación, de tal modo que entre ellos develaran sus dificultades al informar sus hallazgos a sus compañeros (Roig, Llinares y Penalva, 2011) y escuchar sugerencias de éstos.

Las transcripciones de los registros orales, y también la de los escritos, fueron trabajadas siguiendo técnicas de análisis de contenido de acuerdo con un conjunto de ideas básicas (Bernárdez, 1995): segmentación en unidades por criterios temáticos y temporales; agrupamiento sobre la base de las categorías definidas, identificando las distintas modalidades. Se agruparon en un cuadro las respuestas con los porcentajes de aciertos por categorías de análisis; posteriormente se describen cualitativamente las características de tales dificultades.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En el cuadro 2 se muestra el porcentaje de aciertos por cada categoría de respuestas dada por los estudiantes a la situación que se les presentó.

A continuación se muestran algunos de los resultados del proceso por categorías de análisis:

Identificación de los elementos de una función

A pesar de que en el momento de la aplicación de esta prueba los estudiantes ya habían estudiado funciones, 36% no pudo identificar los elementos de la función en el registro figural; 52% no dio cuenta de cómo se relacionan dichos elementos, como ha informado Dolores, confunden los elementos del dominio con los del rango (Dolores, 2004), al no identificar los coeficientes y en algunos casos confundirlos con los exponentes, lo que lleva a cometer errores de escritura, entrada u operación (Carrión, 2007). Estos errores impidieron encontrar las respuestas solicitadas o relacionar adecuadamente los elementos de la función al hacer las transformaciones.

En cuanto al reconocimiento del dominio y el rango de la función analiza-

Cuadro 2 Resultados para la situación dada en una representación figural

Categorías de las respuestas	Núm. de estudiantes	%
Identificación de los elementos de una función	32	64
Relación entre los elementos de una función	24	48
Modelación de una situación funcional	18	36
Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función	36	72
Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita	4	8
Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	13	26

da, en el registro analítico –secuencias numéricas– sólo 8% de los estudiantes identificó el dominio y el rango. En el registro figural, los estudiantes mostraron una visión limitada de estos elementos. Para ellos, los intervalos de variación de la función no van más allá de lo visible, lo que probablemente ocasionó que ningún estudiante pudiera identificarlos; esto evidencia falta de conexión entre los dos registros de representación que ellos mismos habían realizado y manipulado (Meel, 2003).

Relación entre los elementos de una función

Al relacionar los elementos de cada secuencia, por ejemplo, muchos estudiantes consideraban que $^1/_4$ es mayor que $^1/_2$, porque 4 es mayor que 2, decían el doble que, queriendo decir la mitad de, es decir, confundían la terminología usual al referirse a los términos de la secuencia, lo que indica que las dificultades fueron causadas por el pobre manejo de las normas internas en estos registros de representación (Meel, 2003), las que, según Duval (2004), son bien distintas en cada uno de ellos.

Al manipular los trozos de papel sobreponiéndolos sobre una hoja sin partir para que los relacionaran con mayor facilidad, uno de ellos dijo que $^1/_2$ era mayor porque medio pan es más que un cuarto de pan. Esto lleva a pensar que los estudiantes tienen dificultades para ver propiedades geométricas en los objetos; esto es, sin "ojo geométrico" desarrollado (Sinclair, 2003, citado en Fujita, Jones y Yamamoto, 2004), recurren a realizar manipulaciones concretas para inferir ciertas propiedades y hacer las transformaciones en este registro (Meel, 2003) o para establecer conexiones con otros, como el analítico. En otras palabras, los estudiantes, en su mayoría, no lograron establecer congruencias entre los elementos de una función cuando se pasa del registro figural al analítico o viceversa. Esto evidencia sólo una interpretación local de la situación (Benítez, 2010), al identificar elementos de la secuencia que les permitió movilizarse en ella, mas no establecer conexiones con el registro figural (Duval, 2004).

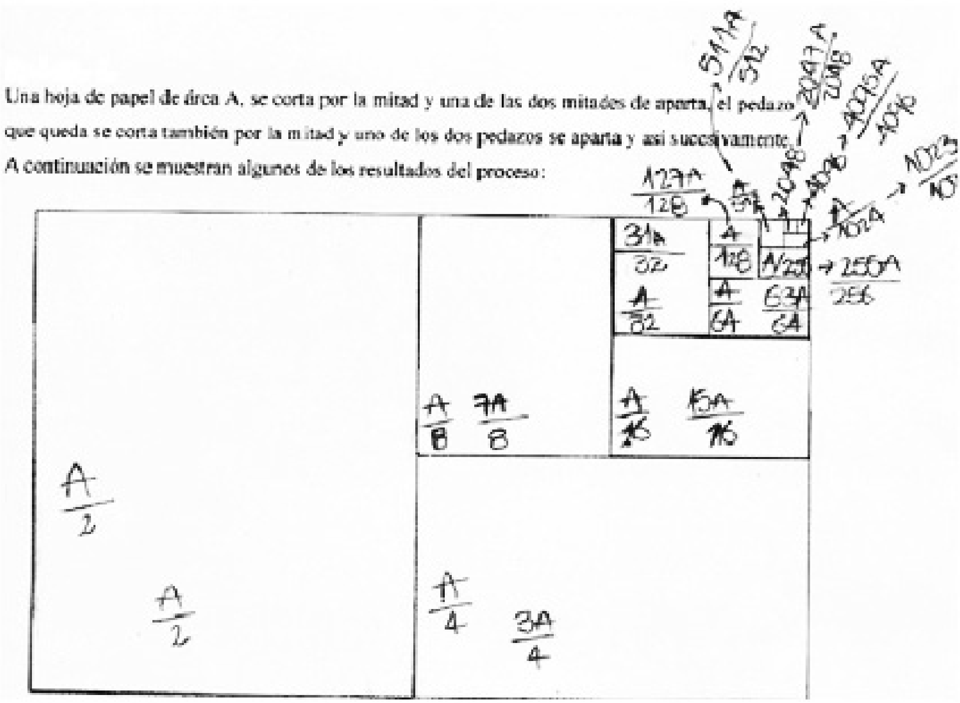
A continuación, se muestra el manuscrito de un estudiante que no pudo relacionar adecuadamente los valores de la secuencia con los trocitos de papel correspondientes, pues asocia $^1/_4$ con $^3/_4$, $^1/_8$ con $^7/_8$ y $^1/_{16}$ con $^{15}/_{16}$ (véase la figura 2), como si fueran fracciones equivalentes, según él, porque tienen el mismo denominador. Cabe destacar que este estudiante reconoció los elementos de la función en el registro figural y los asoció con una de las dos secuencias; sin embargo, no pudo coordinar las secuencias numéricas entre sí ni encontrarles equivalencia con las que resultaron en el registro figural.

De los estudiantes, 48% presentó dificultades al hacer el emparejamiento de los elementos de las secuencias numéricas con los trozos de papel, particularmente en la segunda secuencia, en la que muy pocos pudieron disponer los términos $^3/_4$, $^7/_8$, $^{15}/_{16}$, etc., en papel, y tampoco pudieron asociarlos a su equivalente en la secuencia numérica; quizás porque ésta se formaba por acumulación de los trocitos de papel y para conformar un término había que deshacer el anterior. Este hecho no deja de ser preocupante, ya que tal coordinación, según Duval (2012), es condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

Modelación de una situación funcional

En cuanto a la modelación de la situación, llamó mucho la atención una estrategia que utilizó 72% de los estudiantes: "sumar el numerador con el denominador da el numerador, y el denominador más el denominador da el denominador", lo que puede comprobarse al darle valores a n en la expresión $\frac{2^n - 1}{2^n}$. Esta estrategia, que fue usada como referencia para lo que se trataba de comprender, es

Figura 2 Respuesta dada por un estudiante a la situación planteada.



una acción que busca volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2005). Aunque esta respuesta no es del todo explícita porque no se hacía referencia a cuál de las dos secuencias se referían, sí es un indicio bien claro de que los estudiantes encontraron un patrón de regularidad fuera de toda expectativa. Es decir, intuitivamente encontraron un modelo, que expresaron con algo de dificultad en el lenguaje materno. Aquí la dificultad estuvo en el paso de la representación figural a la analítica, facilitándoseles más el paso a la del lenguaje materno, que tradicionalmente ha sido tan problemática como la analítica.

Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función

De los estudiantes, 72% siguió el patrón propuesto en la situación, pero 16% no terminó el proceso y 56% no logró dar la respuesta solicitada, no obstante identificar el patrón de regularidad de la situación; es decir, determinaron la regla de comportamiento de la situación (Ursini y Trigueros, 2006), pero no la utilizaron exitosamente para dar sus respuestas.

Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas

En cuanto a la descripción de los procesos realizados, se puede afirmar que las dificultades estuvieron relacionadas con las inconsistencias en las descripciones, con los propios procedimientos o con ambos. Al tratar de describir los procedimientos que habían realizado, se limitaban a repetir nuevamente dichos procedimientos (Chaucanés, Amaya, Escorcia, Teherán, López y Medrano, 2009). Algunos describieron un procedimiento errado y otros ni siquiera intentaron describirlo.

Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita

Las soluciones en el registro analítico fueron de tipo aritmético y sólo 8% de los estudiantes utilizó la letra como incógnita al identificar el corte *n*-ésimo como la cantidad desconocida, dado el valor de la función $\left(\frac{1023\text{ A}}{1024}\right)$, es decir, encontrar el corte en que se está cuando se sabe el valor de la secuencia –determinar los valores de la variable independiente dados los de la variable dependiente–, es decir, interpretaron los símbolos literales como número generalizado o como variable. Este grupo, además, obtuvo y utilizó la fórmula $\frac{1}{2^n}$ y $\frac{2^n - 1}{2^n}$ para modelar la situación, utilizándola para dar respuestas a otras preguntas que se les plantearon, por lo que se les facilitó resolver la totalidad del cuestionario.

A los estudiantes se les dificultó demasiado aceptar que el área de la hoja fuera *A* y no una cantidad fija dada. La dificultad estuvo asociada al uso de la letra como variable en relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006) y a su comprensión en este contexto que le permitiera resolver la ecuación (Ochoviet y Oktaç, 2011), ya que no pudieron determinar el área de cada trozo de papel en cada corte –los valores de la variable dependiente, dados los de la variable independiente. Además, 64% de los estudiantes consideraron que los valores de la secuencia dependían del tamaño original de la hoja de papel.

CONCLUSIONES

Aunque los alumnos participantes ya habían tenido numerosas experiencias que involucraban conversiones y tratamientos entre registros de una función, los resultados de esta investigación permiten concluir que tienen serias dificultades al hacer transformaciones con el registro figural como registro de partida a cualquiera de los otros registros en los que se les pidió hacerlo.

Las dificultades estuvieron relacionadas con tres aspectos específicos: *1)* el reconocimiento de los diferentes elementos de una función y cómo se relacionan éstos; *2)* el establecimiento de congruencias entre los elementos del registro de partida y los del registro de llegada, y *3)* la complejidad intrínseca del concepto en estudio (Hitt y Morasse, 2009).

En el primer caso, específicamente, se muestra la dificultad que tienen los estudiantes para identificar los elementos de una función en cualquiera de sus registros y, por tanto, para poder establecer relaciones de dependencia entre ellos. También se muestran las dificultades para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuáles de ellas cambian y cuáles permanecen fijas, lo que les pudo impedir hacer transformaciones en el interior de dicho registro.

En el segundo caso, se refiere la dificultad para elaborar un registro a partir de los elementos identificados en el registro figural, es decir, para establecer congruencias entre este registro y aquellos a los que se migró; esto evidencia que la conversión entre registros no se realiza de manera espontánea (Duval, 2012; Gatica *et al.*, 2010; Hitt, 2003). Especialmente, se observa la dificultad en el paso del registro figural al algebraico, mas no al del lenguaje materno.

En el tercer caso, la dificultad radica en que los estudiantes tienen dificultades para concebir la letra como variable en relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006), la cual ha sido reportada entre las diversas dificultades que se presentan con el concepto de función en los procesos de aprendizaje y enseñanza (Dolores, 2004; Quintero y Cadavid, 2008). Estos resultados ratifican que el aprendizaje de la noción de variable debe ser uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del cálculo, sobre todo por cuanto es imprescindible para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite o derivada de funciones (Gatica *et al.*, 2010).

REFLEXIONES FINALES

Por los resultados expuestos en este trabajo, sería deseable que mediante la enseñanza se dieran las conexiones entre los subconceptos involucrados en una función, al establecer congruencias entre sus elementos en diferentes registros que faciliten el aprendizaje de tal concepto y el acceso al cálculo. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender y atender las dificultades de los estudiantes al manipular cada una de esas representaciones, sino también el análisis de las tareas de tratamiento y conversión entre representaciones que se proponen a los estudiantes (Duval, 1999, 2004, 2012).

Hitt (2003) considera que es importante no priorizar el recurso a algún registro en detrimento de otros cuando se está promoviendo un proceso de construcción de algún concepto matemático. Además, hay que tener presente que, según Duval (2004), la conversión de las representaciones semióticas constituye una actividad cognitiva que no es espontánea y que es difícil de realizar para la gran mayoría de los alumnos; pero a su vez es una de las actividades más importantes para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, que es imprescindible para la conceptualización amplia de los objetos matemáticos, ¿puede haber algo de mayor preponderancia en el aprendizaje de las matemáticas?

Teniendo en cuenta las tareas de conversión al promover un mejor entendimiento de las funciones y permitir el desarrollo de procesos de visualización, deberían establecerse conexiones más potentes entre los elementos de una función en sus diferentes registros de representación para propiciar una mejor comprensión del concepto.

Al comparar los resultados de la exploración realizada mediante este trabajo con los referentes teóricos que la sustentaron, reiteramos lo que ya algunos investigadores han señalado: que sería deseable que el estudio de las funciones en la escuela se abordara desde todos los registros de representación de la función, proponiendo transformaciones entre tantos registros como sea posible y dentro del registro en que se esté trabajando. Por lo que se debería iniciar este tipo de trabajo en la escuela desde los grados inferiores hasta lograr la iniciación al cálculo, donde el uso de tales tratamientos y conversiones entre registros se vuelva cotidiano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albert, A. (1997), "Introducción a la epistemología", en *Serie Antologías*, México, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, pp. 1-28.

Amaya, T. y J. Gulfo (2009), "El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría", en P. Leston (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, núm. 22, pp. 895-901.

Andréu, J. (2001), *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*, http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf (recuperado el 14 de marzo de 2013).

Benítez, A. (2010), "Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3", *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 1, pp. 5-29.

Bernárdez, E. (1995), *El papel del léxico en la organización textual*, Madrid, Universidad Complutense de Madrid.

Brousseau, G. (1999), "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas", traducido por Hernández y Villalba del original: G. Brousseau, (1983), "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4, núm. 2, pp. 165-198.

Carrión, V. (2007), "Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 11, pp. 19-57.

Chaucanés, A., T. Amaya, J. Escorcia, A. López, A. Medrano y E. Terán (2009), "Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional", en P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, núm. 22, pp. 739-746.

Del Castillo, A. (2003), *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*, http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf (recuperado el 9 de marzo de 2013).

Dolores, C. (2004), "Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 7, núm. 3, pp. 195-218.

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.

___________ (2004), *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.

___________ (2012), "Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica", en U. Malaspina (coord.), *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*, Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú, pp. 14-17.

Font, V., J. Godino y B. D'Amore (2007), *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*, http://www.webpersonal.net/vfont/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf (recuperado el 7 de noviembre de 2012).

Fujita, T., K. Jones y S. Yamamoto (2004), *Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry*, ponencia presentada en el Topic Study Group 10 del 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhague, julio.

Gatica, N., A. Maz-Machado, G. May, C. Cosci, G. Echevarría y J. Renaudo (2010), "Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 22, pp. 121-131.

Godino, J., C. Batanero y V. Font (2003), *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*, Granada, Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000), "Representations and Mathematics Visualization", en M. L. Fernández (ed.), *Proceedings, PME-NA 22*, Tucson, Arizona, pp. 131-147.

___________ (2003), "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. 10, núm. 2, pp. 213-223.

Hitt, F. y C. Morasse (2009), "Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función", *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, vol. 7, núm. 17, pp. 243-260.

Ministerio de Educación Nacional (2005), *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia*, http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf (recuperado el 22 de abril de 2013).

Meel. D. (2003), "Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 3, pp. 221-271.

Nájera, V. (2008), *¿Las gráficas una representación natural?*, http://www.valois.com.mx/archivos/Valois_Najera_Graficas_Y_Representaciones_2008.pdf (recuperado el 6 de noviembre de 2012).

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principios y estándares para la educación matemática,* traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y A. Oktaç (2011), "Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 91-121.

Quintero, C. y L. Cadavid (2008), "Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado", 10° Encuentro de Matemática Educativa, http://funes.uniandes.edu.co/705/1/construccion.pdf (recuperado el 5 de noviembre de 2012).

Roig, A., S. Llinares y M. Penalva (2011), "Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 39-65.

Servan, P. e I. Servan (2010), "Intervención en la familia. Estudios de caso", en G. Serrano (coord.), *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas*, Madrid, Narcea, pp. 221-252.

Ursini, S. y M. Trigueros (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 3, pp. 5-38.

DATOS DE LOS AUTORES

Tulio R. Amaya de Armas
Facultad de Educación de la Corporación Universitaria del Caribe, Colombia
tuama1@hotmail.com

Antonio Medina Rivilla
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España
amedina@edu.uned.es

Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica

Martín E. Acosta, Carolina Mejía y Carlos W. Rodríguez

Resumen: Queremos responder a la necesidad de explicitar una práctica matemática que incorpora el software de geometría dinámica como modelo de actividad matemática por reproducir en el salón de clases. Así que presentamos un ejemplo de resolución de un problema de construcción en el que se utiliza el software de geometría dinámica para encontrar la solución y la demostración de dicha solución. En ese proceso de solución, utilizamos la *técnica de lugar geométrico* y la herramienta *lugar geométrico* del software. Mostramos la articulación de los aspectos intuitivos y formales de la actividad matemática de resolución de problemas y el papel del software en dichos procesos.

Palabras clave: matemática experimental, lugar geométrico, arrastre, construcción, demostración, praxeología matemática.

Abstract: We answer the need to explicit a mathematical practice which uses dynamic geometry software as a model of mathematical activity to reproduce in class. We present an example of construction problem solving in qhich we use dynamic geometry to find a solution and a proof of this solution. In the solution process, we use the *locus technique* and the *locus tool* of the sofware. We show the articulation between intutive and formal aspects of the mathematical activity and the role of software in these processes.

Keywords: experimental mathematics, locus, dragging, construction, proof, mathematical praxeology.

Fecha de recepción: 30 de septiembre de 2012; fecha de aceptación:, 13 de mayo de 2013.

1. INTRODUCCIÓN

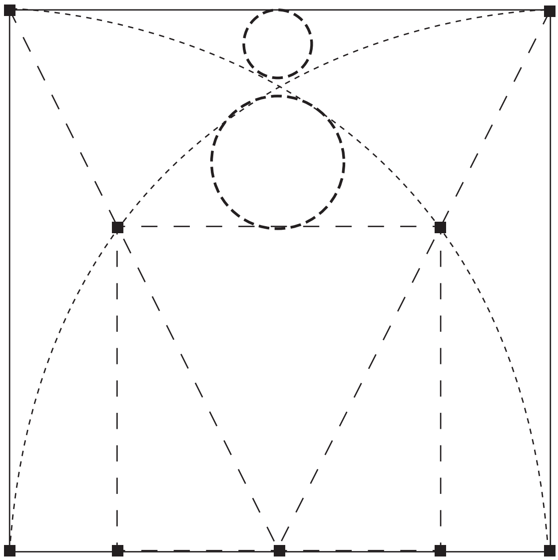
En Acosta (2005), examinamos el problema de la integración en la enseñanza del software de geometría dinámica desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Según dicha teoría, la clase de matemáticas es un intento de reproducir una práctica matemática corriente en la comunidad de los matemáticos. Para describir esa práctica, Chevallard utiliza el término, *praxeología*, y lo define como el conjunto de tareas que la comunidad (la *institución* en términos de Chevallard) realiza, el conjunto de técnicas que pone en práctica para realizar las tareas y los discursos (*tecnologías* en términos de Chevallard) que describen y justifican esas técnicas. Una praxeología se construye sobre la manipulación de unos objetos ostensivos (objetos perceptibles por los sentidos: dibujos, símbolos, sonidos, gestos...); como las tareas, las técnicas y las tecnologías se construyen con respecto a dichos objetos ostensivos, cualquier cambio en el conjunto de objetos ostensivos implica una transformación de toda la praxeología (Bosch, 2001, p. 15). Si interpretamos la integración del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría como la introducción de unos objetos ostensivos nuevos, los dibujos dinámicos, podemos anticipar que dicha introducción requiere una modificación de las tareas, técnicas y tecnologías que se trabajan normalmente para tener en cuenta las características de dichos ostensivos dinámicos. Por tanto, no será un objetivo fácil de alcanzar, pues requiere la modificación de la praxeología matemática de los profesores. Además, como no existe una comunidad de referencia que utilice los ostensivos dinámicos en su práctica matemática, los profesores no pueden intentar reconstruir esa praxeología en sus clases. Se encontrarán entonces con una pérdida de control sobre lo que sucede en la clase y, por consiguiente, intentarán limitar fuertemente el uso de los ostensivos dinámicos.

En este artículo queremos retomar esa idea y presentar una solución de un problema de construcción, utilizando una praxeología matemática con base en los dibujos dinámicos. En esta praxeología, que podemos calificar como "geometría experimental" (Acosta, 2005), los ostensivos informatizados se convierten en herramientas para descubrir una solución y para descubrir una demostración de dicha solución. De esta manera, podemos reunir intuición y rigor en nuestro proceso de solución. Además, implementamos la técnica de lugar geométrico, transponiéndola al contexto de los dibujos dinámicos.

Esperamos de esta manera contribuir a la incorporación del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría, mostrando una práctica matemática que puede servir de referencia en el momento de reconstruir una praxeología matemática que incluya los dibujos dinámicos en una institución determinada.

2. EL PROBLEMA

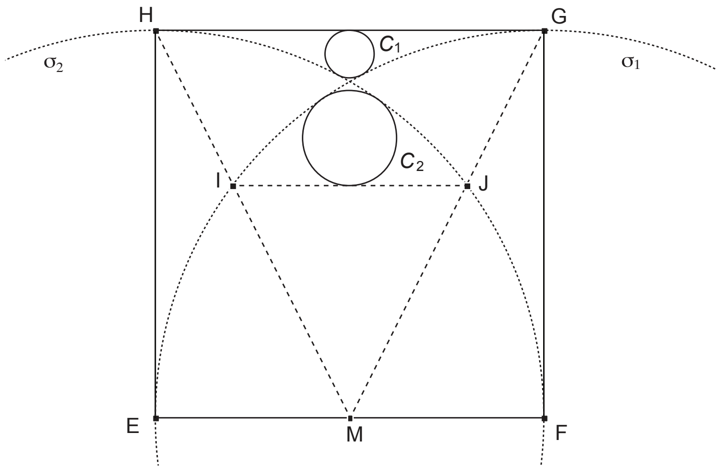
El problema es un *sangaku* (problema japonés de geometría), tomado de la página http://www.albaiges.com/matematicas/algebraanalisis/sangaku.htm



La reproducción de este *sangaku* no presenta dificultad, salvo por la construcción de los dos círculos tangentes a los arcos y a los cuadrados. Nos limitaremos entonces sólo a la construcción de los dos círculos C_1 y C_2 que describiremos de la siguiente manera: El círculo C_1 debe ser tangente al lado *HG* del cuadrado y debe ser tangente a los círculos σ_1 y σ_2; el círculo C_2 debe ser tangente al segmento *IJ* y a los círculos σ_1 y σ_2 como se muestra en la figura 1.

[1] Al pedir la reproducción de una figura, nos referimos a realizar una construcción que garantice que se cumplen las propiedades pedidas en todos los casos. En términos de geometría dinámica, la construcción debe "resistir el arrastre".

Figura 1



3. TÉCNICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO

La técnica de lugar geométrico para la solución de problemas de construcción la describe Petersen (p. 6), quien dice que, si se quiere determinar la posición de un punto,

> Consideramos de forma aislada las diferentes condiciones que debe satisfacer el punto buscado; a cada una de ellas corresponderá un lugar geométrico; y si son rectas o círculos, el problema está resuelto. Porque el punto deberá encontrarse a la vez sobre cada uno de ambos lugares, debe encontrarse en los puntos donde se cortan.

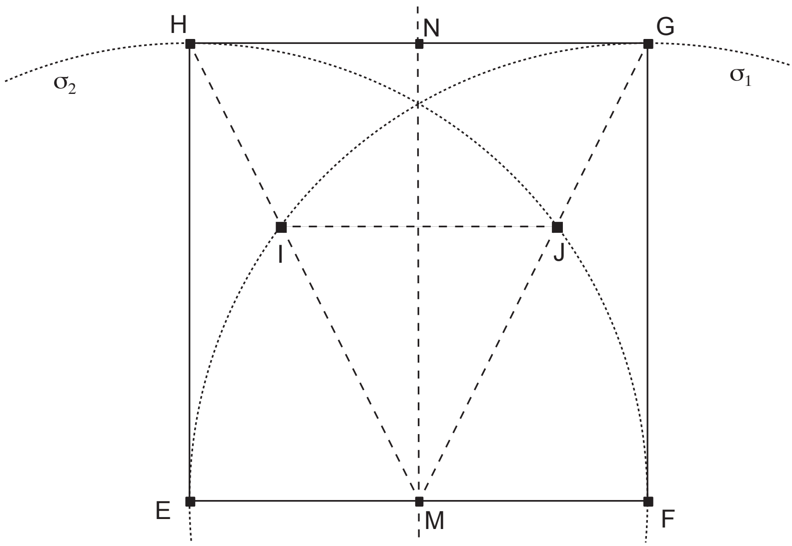
Podemos dar un ejemplo sencillo de aplicación de la técnica en el problema de construir un cuadrado *ABCD* a partir del lado *AB*: una vez trazada la perpendicular a *AB* por *A*, se trata de determinar la posición de un tercer vértice del cuadrado. Podemos definir ese punto a partir de dos condiciones: *i)* debe estar sobre la recta perpendicular a *AB* por *A*, *ii)* la distancia de ese punto a *A* debe ser igual a la distancia de *B* a *A*. Si consideramos todos los puntos que cumplen la primera condición, tenemos nuestro primer lugar geométrico: la recta perpendicular a *AB* por *A*. Si consideramos todos los puntos que cumplen la segunda condición, tenemos nuestro segundo lugar geométrico: el círculo de centro *A* que pasa por *B*. La intersección de esos dos lugares geométricos contiene todos los puntos que cumplen las dos condiciones: dos puntos que pueden servir para la construcción del cuadrado *ABCD*.

En Cabri, un lugar geométrico es un objeto que representa la trayectoria de un punto[2] que depende de la posición de otro punto con una trayectoria definida, es decir, que recorre un objeto dado. Por ejemplo, si tomamos un círculo *c* cualquiera, un punto fijo *A* sobre *c* y un punto *B* que recorre *c*, podemos construir el punto medio *M* de *AB*, punto que depende de la posición de *B*. El lugar geométrico de *M* con respecto a *B* será la trayectoria de *M* cuando *B* recorre el círculo *c*, es decir un círculo que pasa por *A* y por el centro de *c*.

Para transponer la técnica de lugar geométrico en el contexto de los dibujos dinámicos de Cabri, debemos tener en cuenta un parámetro extra: la dependencia de un punto con respecto a otro. Podemos enunciar la técnica transpuesta de la siguiente manera: cuando se quiere determinar la posición de un punto *X* en una construcción, se hace una construcción blanda (o ajustada), es decir, una construcción en la que una de las condiciones sólo se cumple al ajustar la posición de un punto que llamaremos punto de control, *K*. Si existe un punto *Y* dependiente de *K*, de tal manera que al ajustar *K*, *Y* quede sobre un objeto fijo y sea la posición buscada, entonces puede construirse el lugar geométrico de *Y* con respecto a *K* y la intersección de ese lugar con el objeto fijo será el punto *X* buscado. Puesto que las construcciones realizadas con base en los puntos de intersección de los lugares geométricos dibujados por Cabri contienen errores de precisión (al hacer cálculos de distancias y ángulos, por ejemplo), en nuestra praxeología utilizamos los lugares dibujados por Cabri únicamente para darnos idea de la forma y características del lugar; luego construimos un objeto que cumpla esas condiciones y determinamos su intersección con otros objetos para producir la solución. Esta restricción implica que los únicos lugares que pueden producirse como objetos de Cabri son las rectas, los círculos y las cónicas.

[2] En realidad de cualquier objeto de Cabri: recta, círculo, polígono, etcétera.

Figura 2



4. EXPLORACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN

Observemos que la mediatriz del segmento *EF* corta al cuadrado en los puntos *M* y *N*, y es el eje de simetría de la figura. Por esto sabemos que el centro de cada uno de los círculos buscados estará sobre el segmento *MN* (véase la figura 2).

Construimos un círculo tangente a *HG* en *N* y con centro sobre la recta *MN*.[3] Llamemos *O* a este centro. Si movemos *O* vemos que, en algún momento, este círculo es tangente a σ_1. Existe pues una familia de círculos dentro de la cual se encuentra una solución al problema. Para poder aplicar la técnica del lugar geométrico, necesitamos caracterizar el punto de tangencia del círculo solución con σ_1 como parte de una familia de puntos que dependen del punto *O*.

Sean *A* y *B* los puntos de intersección del círculo con centro en *O* y el círculo σ_1. Cuando estos dos círculos son tangentes, los puntos *A* y *B* coinciden. Necesitamos un punto que dependa de *A* y *B* pero que no esté en σ_1. Si tomamos el punto medio *C* entre *A* y *B*, tenemos que *C* no está sobre σ_1, pero coincide con *A* y *B* en el punto de tangencia. Por tanto, podemos caracterizar

[3] Esta es la construcción blanda a la que nos referimos en la descripción de la técnica.

Figura 3

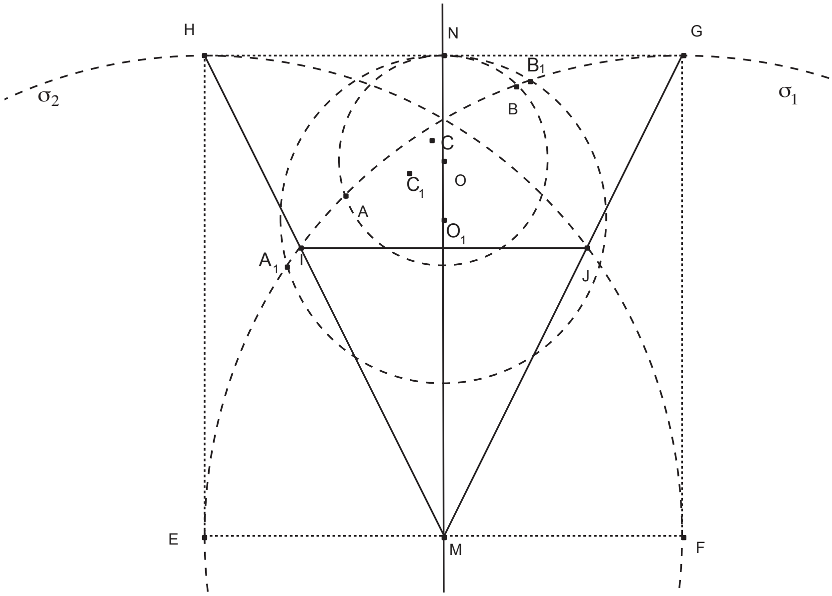


Figura 4

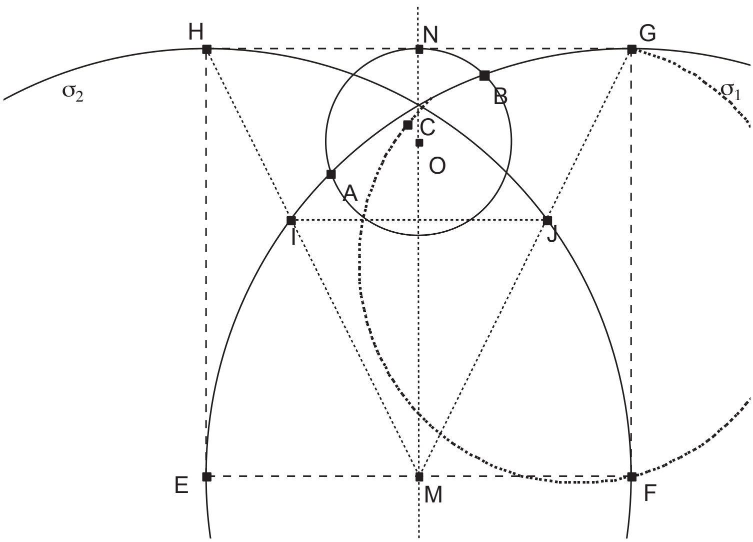
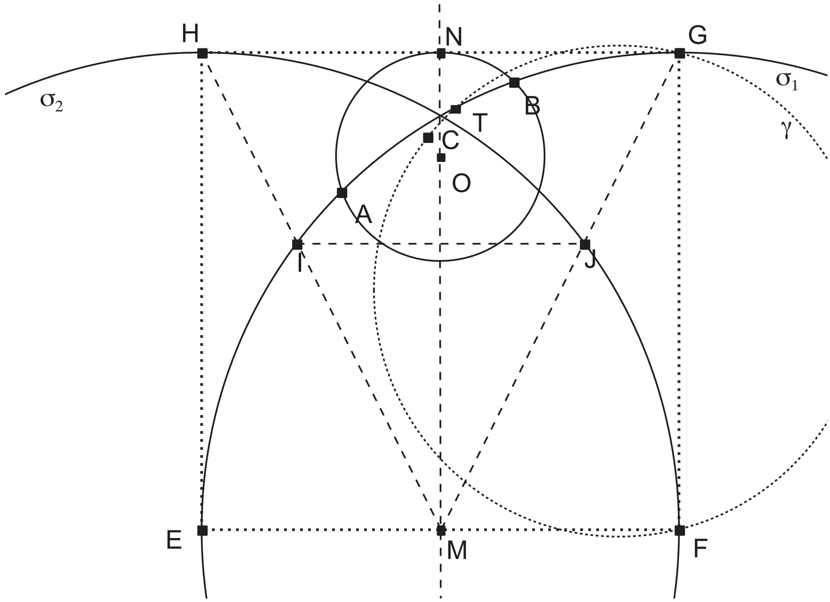


Figura 5



el punto de tangencia como parte de la familia de los puntos medios de los segmentos *AB* (véase la figura 3).

Construimos el punto medio *C* del segmento *AB*. Trazamos el lugar geométrico del punto *C* con respecto al punto *O* usando la herramienta "lugar geométrico" de Cabri. Observamos que, al parecer, es un arco de un círculo[4] (véase la figura 4).[5]

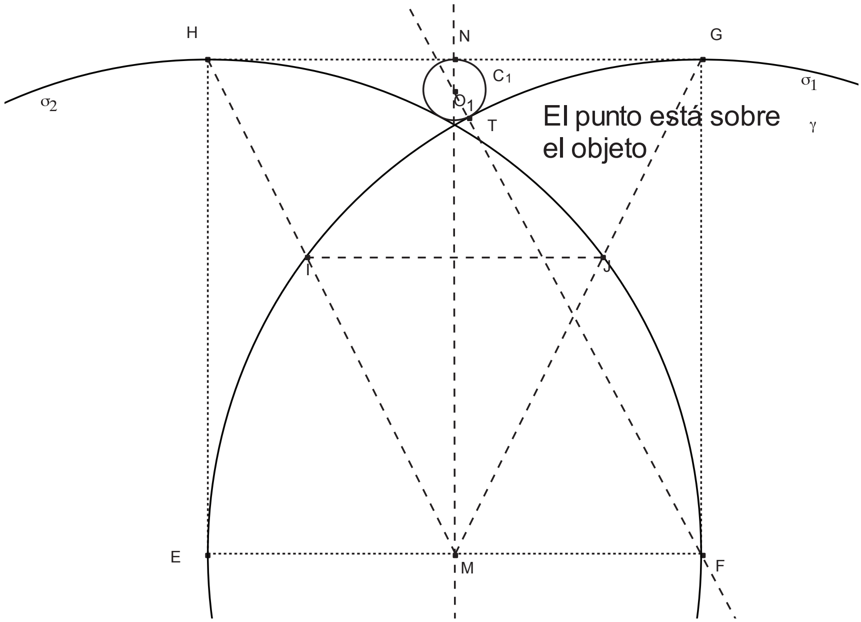
Si construimos este círculo, sus intersecciones con σ_1 serán los puntos de tangencia del círculo solución C_1 con σ_1.

Para construir el círculo que coincide con este lugar geométrico, necesitamos determinar tres puntos. Observando la figura, vemos que los puntos *G*, *F* y *C* pertenecen al lugar geométrico. Construimos el círculo que pasa por *C*, *F* y *G*.

[4] El arco faltante corresponde a los casos en los que el círculo de centro *O* no corta a σ_1. Una manera de construir el arco faltante sería usando las intersecciones de estos dos círculos, incluidas las soluciones imaginarias. Para estas construcciones, véase Cuppens (1999).

[5] Podría remplazarse el punto medio de AB por un punto que divida el segmento en cualquier razón. En ese caso, el lugar geométrico obtenido sería una curva de grado mayor que 2, y por lo tanto no podría producirse un objeto de Cabri con esas características.

Figura 6 Construcción del círculo C_1 y verificación de la tangencia



Llamemos este círculo γ. Los puntos de intersección de los círculos γ y σ_1 son los puntos de tangencia buscados; sin embargo el punto *G* no nos interesa en este caso (véase la figura 5).

Sea *T* el punto de intersección entre γ y σ_1. El siguiente paso sería construir el círculo solución, usando el punto *T*. Basta con trazar la mediatriz entre los puntos *N* y *T* y marcar el punto de intersección entre esta y la recta *MN*, sea O_1 este punto. O_1 es el centro del círculo buscado C_1 (véase la figura 6).

Para verificar que la construcción sea correcta, controlamos si el círculo C_1 es tangente al círculo σ_1. Para ello, trazamos la recta O_1F (*F* es el centro de σ_1) y usamos la herramienta "pertenece" de Cabri aplicándola al punto *T* y a esa recta,[6] (véase la figura 6). Por simetría, se tiene que C_1 es tangente también a σ_2.[7]

[6] **Teorema.** Si el punto de intersección de dos círculos está sobre la recta que une los centros, entonces los círculos son tangentes.

[7] Este procedimiento lo llamamos verificación por construcción y es característico de una praxeología de geometría experimental: para verificar una conjetura sobre una construcción, se hace la construcción utilizando la conjetura y se verifica que cumpla las propiedades pedidas.

Figura 7

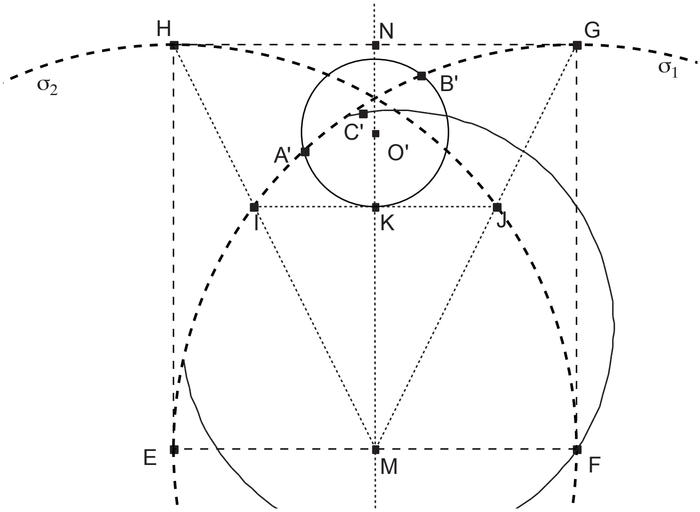
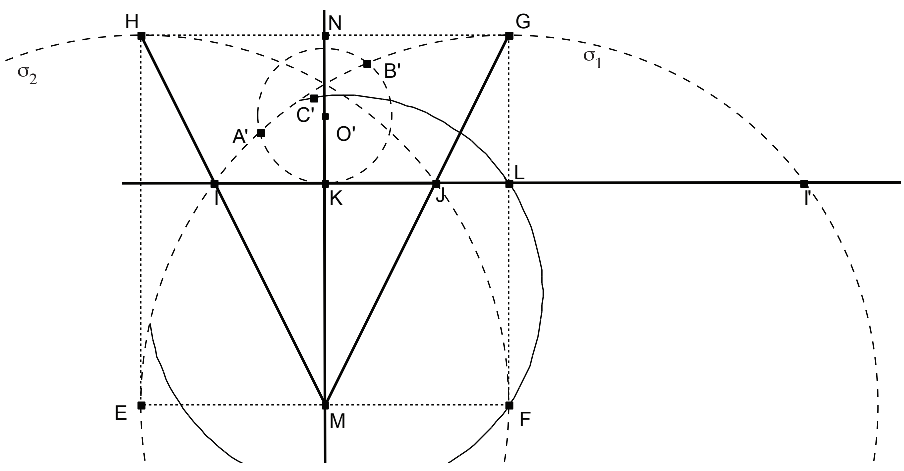


Figura 8



Ahora vamos a buscar la construcción del segundo círculo del problema, C_2. Al igual que para el círculo C_1, sabemos que este debe ser tangente a σ_1, σ_2 y al segmento *IJ*. Nuevamente, el centro del círculo C_2 debe estar sobre la recta *MN* y el círculo debe pasar por el punto *K* de intersección entre *IJ* y *MN*. Construimos un círculo tangente a *IJ* en *K* y de centro *O'* sobre la recta *MN*. Al igual que para la solución de C_1, vamos a considerar los dos puntos de intersección de este círculo con σ_1 (*A'* y *B'*), y su punto medio (*C'*). Cuando el círculo de centro *O'* sea tangente a σ_1, los puntos *A'*, *B'* y *C'* coincidirán. Solicitamos a Cabri el lugar del punto *C'* con respecto a *O'* y constatamos que nuevamente es un arco de círculo (véase la figura 7).

Los puntos de corte de ese lugar geométrico con σ_1 serán los puntos de tangencia del círculo buscado. Para poder construirlos, necesitamos construir el círculo correspondiente al lugar geométrico y, por tanto, necesitamos conocer tres puntos, pero en la figura sólo podemos identificar claramente dos: *F* y *C'*. Sin embargo, mirando la figura, podemos conjeturar que el punto de corte de ese lugar geométrico con el lado *FG* es el punto de intersección de la recta *IJ* con *FG*, que llamaremos *L* (véase la figura 8).

Así construimos el círculo que pasa por *C'*, *F* y *L* que denotamos como γ'. Nuevamente este círculo corta σ_1 en dos puntos *S* y *U*, pero el que nos interesa es *S*, que será el punto de tangencia del círculo C_2 con σ_1 (véase la figura 9).

Figura 9

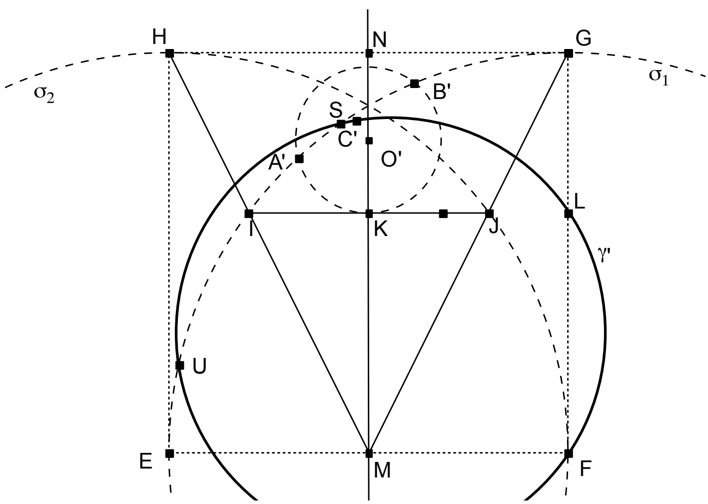
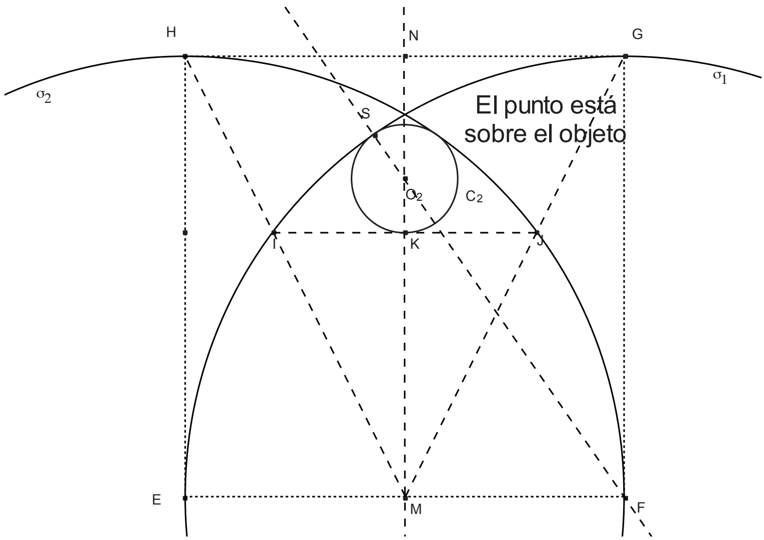


Figura 10



Construimos entonces el círculo C_2 a partir de *S* y verificamos como antes que es tangente al círculo σ_1 y al círculo σ_2 (véase la figura 10).

Hasta aquí hemos resuelto de manera experimental el problema. Ahora debemos realizar una demostración de que ese procedimiento de construcción produce círculos tangentes de la manera especificada.

5. FORMALIZACIÓN

Ahora debemos demostrar que las construcciones hechas son efectivamente las soluciones al problema. Es decir, que el lugar de *C* con respecto a *O* es un círculo y el lugar de *C'* con respecto a *O'* es un círculo, y que dichos círculos pasan por los puntos *C*, *F*, *G* y *C'*, *F*, *L*, respectivamente. Es evidente que el punto *C*, que generó el lugar, pertenece a este. Debemos examinar si los puntos *F* y *G* corresponden a puntos medios de intersecciones de círculos de centro *O* con σ_1. *F* es el centro del círculo σ_1, así que será el punto medio de alguna de las cuerdas comunes a los dos círculos. Por otro lado, cuando *O* está en el punto del infinito de la recta *MN*, el círculo correspondiente coincide con la recta *HG*.

Esta recta es tangente a σ_1 y, por tanto, en este caso los puntos *A* y *B* coinciden con *G* (véase la figura 5).

De la misma manera, se tiene que *C′* es un punto sobre el lugar geométrico que él mismo genera, además, cuando el punto *O′* está en el punto del infinito de la recta *MN*, el círculo coincide con la recta *IJ*. Como los puntos *I* y *J* son simétricos con respecto a *MN* y esta es paralela a *FG*, entonces *IJ* es perpendicular a *FG*. Pero *FG* es un eje de simetría de σ_1, por consiguiente, la intersección de *FG* con *IJ* es el punto medio de la cuerda que define *IJ* con respecto a σ_1 y, por tanto, es punto medio de los dos puntos *I* e *I′* de intersección de *IJ* con σ_1 (véase la figura 8).

Pero no tenemos argumentos para justificar teóricamente que el lugar de *C* con respecto a *O* es un círculo, o que el lugar de *C′* con respecto a *O′* es un círculo. Así que retomamos la experimentación con la figura para buscar dichos argumentos.

5.1. Exploración para la demostración

Comenzamos esta segunda exploración intentando generalizar la construcción hecha: tenemos un círculo fijo y una familia de círculos tangentes en un punto, generada por un círculo móvil, y debemos demostrar que los puntos medios de las cuerdas comunes al círculo fijo y al círculo móvil recorren un círculo.

Si trazamos la recta que pasa por los puntos de intersección del círculo móvil y el círculo fijo (es decir, la cuerda común), al mover el centro del círculo móvil, observamos que aparentemente esas cuerdas comunes pasan todas por un mismo punto. Para verificar esta conjetura, activamos la traza de la cuerda común y nuevamente arrastramos el centro del círculo móvil (véase la figura 11).

Efectivamente, todas las cuerdas comunes pasan por un mismo punto. Este hecho sirve para justificar que el lugar estudiado es un círculo. En efecto, como la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro del círculo, tenemos en realidad dos rectas móviles que pasan por puntos fijos y forman un ángulo recto. Por tanto, los puntos de intersección de esas dos rectas están sobre el círculo cuyo diámetro está definido por los dos puntos fijos.

Sólo nos falta justificar teóricamente que las cuerdas comunes pasan todas por un mismo punto. Hacemos una figura en la que tenemos dos de esas cuerdas comunes (véase la figura 12); el punto de intersección de esas cuerdas tiene igual potencia con respecto a los tres círculos, ya que cualquier

Figura 11

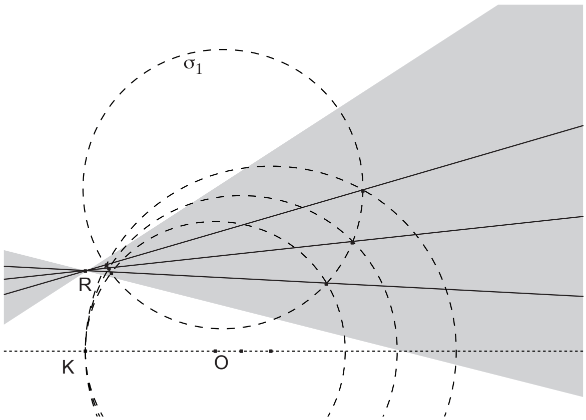
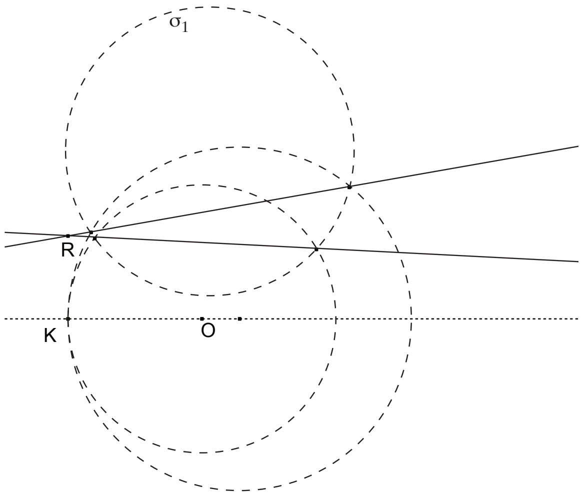


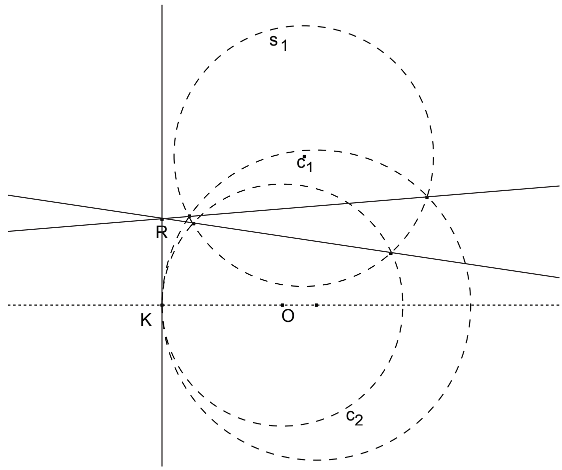
Figura 12



punto sobre una cuerda común a dos círculos tiene igual potencia con respecto a ambos círculos.

Por otra parte, los círculos tangentes entre sí tienen en común a la tangente en ese punto. Consideremos entonces dos círculos c_1 y c_2, tangentes en un punto *K* y un tercer círculo σ_1 cualquiera. La tangente común de c_1 y c_2 será

Figura 13



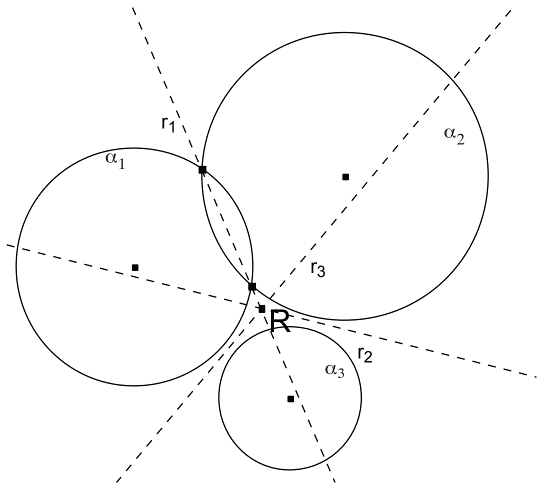
cortada por la cuerda común de c_1 y σ_1. Llamemos R a ese punto de intersección (véase la figura 13). Como R está sobre la tangente común de c_1 y c_2, tiene igual potencia con respecto a esos dos círculos (Moise, 1964, p. 455); y, como está sobre la cuerda común de c_2 y σ_1, tiene igual potencia con respecto a esos dos círculos, por consiguiente, tiene igual potencia con respecto a c_2 y σ_1, es decir, debe estar sobre la cuerda común de c_2 y σ_1; de esta manera, puede demostrarse que todas las cuerdas comunes al círculo móvil y el círculo fijo pasan por el mismo punto.

5.2. Demostración

Definición. Dados dos círculos, el *eje radical* es el lugar de todos los puntos que tienen igual potencia con respecto a los dos círculos.

Observación: si los círculos son secantes, el eje radical pasa por los puntos de intersección. Si los círculos son tangentes, el eje radical es la tangente común. Si los círculos no se cortan, el eje radical pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

Figura 14



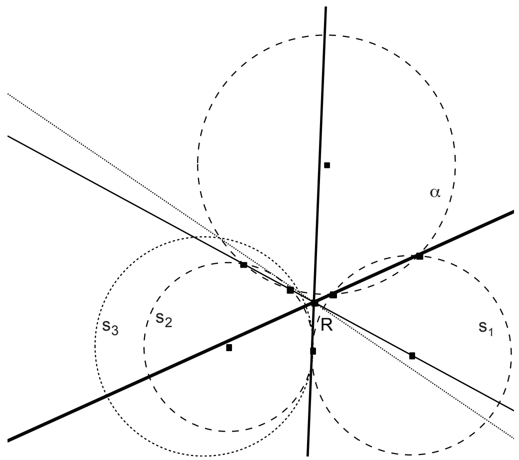
Lema 1. Dados tres círculos, no todos tangentes en un mismo punto, los tres ejes radicales son concurrentes.

Demostración. Sean α_1, α_2 y α_3 los tres círculos dados. Llamemos r_1 el eje radical de α_1 y α_2 y r_2 el eje radical de α_2 y α_3. Como α_1, α_2 y α_3 no son tangentes en un mismo punto, entonces r_1 y r_2 son diferentes y se cortan en un punto *R*. Note que *R* tiene igual potencia con respecto a α_1 y a α_2, y también con respecto a α_2 y a α_3, por tanto, R pertenece al eje radical r_3 de α_1 y α_3. Los tres ejes concurren en *R* (véase la figura 14).

Lema 2. Dado un haz de círculos tangentes en un punto y un círculo α que no está en el haz, las rectas que contienen las cuerdas comunes de α y cualquier círculo del haz pasan por un punto fijo.

Demostración. Observe que la recta tangente común a todos los círculos del haz es el eje radical de todos estos círculos. Sean s_1 y s_2 dos círculos tangentes que pertenecen al haz y α el círculo exterior al haz. Por el Lema 1, sus ejes radicales se cortan en un punto *R*. Si reemplazamos s_2 por cualquier otro círculo s_3 de la familia, el eje radical de s_3 y α también debe pasar por *R*, puesto que *R* es la intersección del eje radical de s_1 y s_3 y el eje radical de s_1 y α (véase la figura 15).

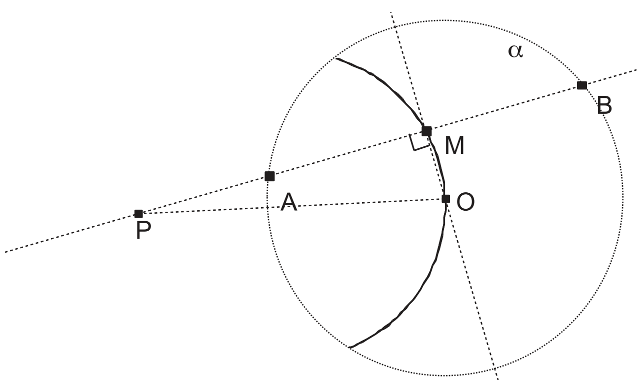
Figura 15



Lema 3. Dado un punto *P* y un círculo α de centro *O*, el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas definidas por las rectas que pasan por *P* es un círculo.

Demostración. Sea *l* una recta que pasa por *P* y corta a α en *A* y *B*. Sea *M* el punto medio de *AB*. La recta perpendicular a *AB* por *M* pasa por el centro *O*. Como el ángulo *PMO* es recto, el punto *M* está sobre el círculo de diámetro *PO* (véase la figura 16).

Figura 16



Teorema 1. Dado un haz de círculos tangentes en un punto y un círculo α que no está en el haz, los puntos medios de las cuerdas comunes al círculo α y los círculos del haz están sobre un mismo círculo.

Demostración. Por el lema 2 sabemos que las rectas que contienen las cuerdas comunes del círculo α y los círculos del haz pasan todas por un mismo punto. Por el lema 3 podemos concluir entonces que los puntos medios se encuentran sobre un mismo círculo.

Demostración de la construcción

1) *El círculo γ es el lugar geométrico de los puntos medios de los puntos de intersección del círculo σ_1 y los círculos tangentes en N.* Como los círculos son tangentes en *N* y σ_1 es un círculo que no pertenece a ese haz, por el Teorema 1 sabemos que el lugar geométrico buscado es un círculo. Ya habíamos demostrado que los puntos *C*, *F* y *H* pertenecen al lugar, por tanto, γ es el lugar buscado. (De la misma manera podemos demostrar que el círculo γ' es el lugar de los puntos medios de los puntos de intersección del círculo σ_1 y los círculos tangentes en *K*.)

2) *El punto T de intersección de γ y σ_1 es el punto de tangencia del círculo σ_1 y uno de los círculos tangentes en F.* Como *T* está sobre γ, es el punto medio de los puntos de intersección del círculo σ_1 con uno de los círculos tangentes en *N*; pero *T* está sobre σ_1, por tanto, los puntos de intersección de los cuales *T* es punto medio deben coincidir con *T*, así que el círculo σ_1 y el círculo tangente en *N* son tangentes. (De igual manera podemos demostrar que el punto *T'* de intersección de γ' y σ_1 es el punto de tangencia del círculo σ_1 y uno de los círculos tangentes en *K*.)

3) *El círculo C_1 construido es tangente a σ_1 y a H.* El centro de C_1 fue construido en la intersección de la mediatriz de *TN* y la recta *NM*; por tanto, es equidistante de *T* y de *N*; como el círculo pasa por *T*, también pasa por *N*; como *T* es punto de tangencia entre σ_1 y uno de los círculos que pasan por *N* y tienen su centro en la recta *NM*, y C_1 es uno de esos círculos, entonces C_1 es tangente a σ_1; como C_1 tiene su centro en *NM*, *NM* es perpendicular a *HG* en *N* y C_1 pasa por *N*, C_1 es tangente a la recta *HG*. (De la misma manera, podemos demostrar que el círculo C_2 es tangente a σ_1 y a *IJ*.)

4) *El círculo C_1 es tangente al círculo σ_2.* Como σ_2 es simétrico de σ_1 con respecto a *NM* y el centro de C_1 está sobre *MN*, si C_1 es tangente a σ_1 tiene que

ser tangente a σ_2. (De la misma manera, podemos demostrar que el círculo C_2 es tangente al círculo σ_2.)

6. CONCLUSIONES

Este ejemplo de trabajo experimental con Cabri para la solución de un problema de construcción ilustra la utilización de los dibujos dinámicos como actividad matemática: la posibilidad de hacer una construcción ajustada permite buscar relaciones teóricas que conducen a la construcción exacta y buscar también argumentos teóricos que justifiquen la relación entre las propiedades conjeturadas y la solución del problema. Así que la relación entre intuición y deducción no es necesariamente excluyente, como podría pensarse; además, el trabajo experimental no va en menoscabo del trabajo de demostración, sino que son complementarios. También ilustra la utilización de la técnica de lugar geométrico en el contexto de los dibujos dinámicos; como vimos, es necesaria una transposición de dicha técnica para tener en cuenta las características de la herramienta "lugar geométrico"; además, su uso no elimina la necesidad de justificar deductivamente lo que se observa en la pantalla.

Por supuesto, nuestra solución no es la única posible, y podrían utilizarse los ostensivos de Cabri para encontrar otras soluciones con otras técnicas posibles.

No es nuestra intención proponer este problema como actividad de clase, sino como práctica de referencia que sirva para:

1) Definir la técnica de lugar geométrico utilizando ostensivos dinámicos.
2) Resaltar la posibilidad de experimentar para encontrar una construcción y una demostración.
3) Resaltar la necesidad de formalizar los resultados encontrados experimentalmente como una forma de incorporarlos en el sistema teórico de referencia.

No podemos afirmar que este ejemplo constituya una praxeología matemática, pero sí es un ejemplo de la utilización de la técnica de lugar geométrico para la resolución de un problema de construcción, y de su correspondiente tecnología. Esperamos poder acumular suficientes ejemplos de este tipo para demostrar la existencia de dicha praxeología.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2005), "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", *Educación Matemática*, vol. 17, num. 3, pp. 121-140.

Bosch, M. (2001), "Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática", en Luis Contrera (ed.): *Cuarto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación*, Universidad de Huelva, pp. 15-28.

Cuppens, R. (1999), *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri Géomètre*. Brochure APMEP, núms. 124 y 125.

Moise, E. y F. Downs, Jr. (1964), *Geometría moderna*, Massachusetts, Fondo Educativo Interamericano,

Petersen, J., *Métodos y teoría para la resolución de problemas de construcción*. Traducido y publicado por Francisco Javier García Capitán, disponible en http://www.yair.es/multimedia/datos/lugares_petersen_053736_281110_7592.pdf

DATOS DE LOS AUTORES

Martín E. Acosta
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
martin@matematicas.uis.edu.co

Carolina Mejía
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
cmejiam@matematicas.uis.edu.co

Carlos W. Rodríguez
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
cwrodriguez@matematicas.uis.edu.co

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde reseñas y contribuciones para la docencia en matemáticas.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista Educación Matemática publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y el Consejo Mexicano de Investigación Educativa tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una licencia de publicación no exclusiva que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista Educación Matemática publica los artículos en español y, eventualmente, artículos de investigación en portugués.

Artículos de investigación:

- Deberán tener originalidad y rigor, y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor a 30 cuartillas.

- Deberá incluir, también, un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito el artículo (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés o francés del resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- En archivo aparte, deberá prepararse una carátula que contenga: *a)* título del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética [máximo seis cuartillas] en las memorias del mismo), y *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán en blanco y negro las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si éstas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, p. 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo.

Briand, J. (2011), "El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 5-36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg,* México, DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999), *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, Nueva York, Free Press.

Moreno, L y J. Kaput (2005), "Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra", en M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia,* México, Paidós (Col. Educador 179).

Hernández, S. y H. Jacobo (2011), "Descripción de algunas tesis de maestría en

educación matemática", *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 13, núm. 1. Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 6 000 palabras (y 12 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación matemática considera para su publicación un número limitado de contribuciones para la docencia, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, puntos de vista sobre algún material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 4 000 palabras o 10 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word, con los mismos lineamientos que para la presentación de artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje.

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de un mes. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de al menos dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como Nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

En e l caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos, de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Precio del ejemplar en papel	Institucional	Personal
	$300.00 más gastos de envío	$150.00 más gastos de envío

Educación Matemática

Se terminó de imprimir en los talleres
de Alta Resolución, S. A. de C. V.,
en el mes de agosto de 2013.
Tel.: (55) 1497-3970

Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para su reposición.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Sergio Ballerteros Pedrozo*, Universidad Pedagógica Enrique José Varona, Cuba
- *Edgar José Becerra Bertram*, CENEVAL, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississipi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio Jose Lopes*, Centro de Educaço Matematica, Brasil
- *Eduardo Luna*, Barry University, Department of Mathematics and Computer Science, School of Arts and Sciences, Estados Unidos
- *Bertha Alicia Madrid Núñez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Armando Martínez Cruz*, Californa State University Fullerton, Estados Unidos
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto de Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Universidad de Estrasburgo, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Fac. de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, República de Panamá
- *Santiago Valiente Barderas*, Escuela Normal Superior de México, México

www.revista-educacion-matematica.com