ENSAYOS

El rol del cuerpo en la construcción del concepto Espacio Vectorial

Marcela Parraguez González

Resumen: La investigación que se reporta a continuación utiliza la Teoría APOE como marco teórico y metodológico con el objetivo de explicar el rol del cuerpo (o campo) en la construcción del concepto espacio vectorial. Las tres componentes propuestas por el ciclo de investigación –*descomposición genética; diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos*– determinan la estructura general del estudio. Resultados obtenidos indican que el rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial está vinculado, a través de la combinación lineal de vectores, con la existencia de vectores linealmente independientes.

Palabras Clave: Teoría APOE, espacio vectorial, cuerpo.

The role of the field in the construction of the concept of Vector Space

Abstract: The research reported here uses the APOE theory as theoretical and methodological framework, in order to explain the role of the field in the construction of the vector space concept. The three components proposed by the research cycle –*genetic decomposition, design and application of instruments and data analysis and verification*– determine the overall structure of the study. The results obtained indicate that the role of the field in the construction of vector space concept is linked with the existence of linearly independent vectors, through the linear combination of vectors.

Key words: APOS Theory, Vector Space, Field

Fecha de recepción: 11 de agosto de 2011. Fecha de aceptación: 26 de marzo de 2013.

ANTECEDENTES

El concepto de espacio vectorial, de gran importancia en álgebra lineal, ha recibido atención de los especialistas en diferentes países. Investigadores franceses (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997) hacen referencia al *obstáculo del formalismo*. Este obstáculo ocurre cuando los estudiantes tratan de manipular mecánicamente números, vectores, ecuaciones, coordenadas, etc. Es decir, cuando se encuentran bajo una avalancha de nuevas palabras símbolos, definiciones y teoremas".

Estos autores concluyen que "para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que ellos nunca pueden imaginarse" (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997: 116). Así también, se ha reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001). Otras investigaciones apuntan a las dificultades que los estudiantes tienen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial y la construcción esquema en sus tres niveles: *Intra*, *Inter* y *Trans* del concepto espacio vectorial (Parraguez y Oktaç, 2010).

MARCO TEÓRICO: TEORÍA APOE

El uso de la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) para explicar la construcción de los conceptos de Álgebra Lineal es relativamente reciente (Trigueros y Oktaç, 2005; Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa y Oktaç, 2010), aunque este acercamiento teórico ha sido usado con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos del Cálculo, Análisis, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta y Lógica. La Teoría APOE está interesada en las construcciones mentales de los estudiantes cuando están aprendiendo un concepto matemático. Cuando se está usando esta teoría, los investigadores primero hacen una descripción de un modelo que explica el camino que los estudiantes pueden seguir en la construcción de los conceptos propuestos.

Este modelo es conocido como la *descomposición genética* (Asiala *et al.*, 1996; Roa y Oktaç, 2010) y consiste en construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (tales como asimilación, interiorización, encapsulación y coordinación) puestos juntos de una manera que permite explicar el aprendizaje del concepto en cuestión. Debe enfatizarse que la descomposición genética se da en términos de construcciones cognitivas y de un análisis de conceptos del álgebra lineal a enseñar y no solo en términos de resultados matemáticos. Una vez planteadas estas ideas básicas, a continuación se explican brevemente las principales nociones cognitivas que se han utilizado en esta investigación, y que se pueden encontrar, por ejemplo, en Dubinsky *et al*. (1994), Asiala *et al*. (1997) y Brown, A., De Vries, D., Dubinsky y Thomas (1997).

Se hace referencia a una *concepción acción* de un concepto cuando el estudiante puede realizar cálculos y trasformaciones de objetos matemáticos como resultado de una indicación externa que le proporcione detalles precisos de los pasos a seguir, como por ejemplo, reemplazar números por variables en una fórmula, o bien cuando puede realizar múltiples pasos algorítmicos, siendo cada paso provocado por uno previo.

Cuando el estudiante reflexiona sobre estas acciones, puede pensar sobre los pasos sin tener que realizarlos explícitamente. En este caso, se dice que las acciones han sido *interiorizadas* y el estudiante muestra una *concepción proceso*. Dos o más procesos pueden ser *coordinados* para formar un nuevo proceso.

Cuando surge la necesidad de realizar transformaciones en estos procesos, el estudiante los *encapsula* en objetos y ahora puede aplicar acciones sobre esas nuevas entidades construidas. En este caso, se evidencia una *concepción objeto* del concepto en cuestión.

Finalmente, objetos, procesos y acciones relacionados con el concepto en cuestión forman una estructura coherente llamada *esquema,* que puede ser evocada para resolver situaciones problema. Un nuevo objeto puede ser *asimilado a* un esquema existente; de esta manera se tiene un esquema ampliado para incluir nuevos objetos.

Según Piaget y García (1983, 1989), el desarrollo cognitivo de los esquemas, que lleva a la comprensión o construcción de los conceptos, pasa por tres niveles –la tríada Intra, Inter y Trans–. El nivel de evolución de un esquema se denomina *Intra* cuando la concepción objeto del concepto se mantiene aislada de otras acciones, procesos, objetos y esquemas. Por ejemplo, el estudiante puede verificar si diferentes conjuntos pueden ser espacios vectoriales o no, pero no ve la estructura inherente de espacio vectorial en todos ellos. En el nivel *Inter* de evolución de un esquema, el objeto comienza a tener relaciones estructurales con otros conceptos; en el caso de los espacios vectoriales, hay algunas conexiones con sub-espacios, transformaciones lineales, bases, etc. En el nivel *Trans* el estudiante construye la estructura o modelo con todos sus vínculos que subyace en la actividad que está desarrollando.

Una Descomposición Genética del concepto Espacio Vectorial y el Rol del Cuerpo en su Construcción

En lo que sigue, se considera que $(V, +, \odot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si y solo si: $(V, +)$ *es un grupo abeliano.*

1. $\odot : \mathbb{K} \times V \to V$, *es una función que cumple*:
   (a) $(\forall\ a \in \mathbb{K})\ (\forall\ x, y \in V)\ (a \odot (x + y) = a \odot x + a \odot y)$
   (b) $(\forall\ a, b \in \mathbb{K})\ (\forall\ x \in V)\ ((a+b) \odot x = a \odot x + b \odot x)$
   (c) $(\forall\ a, b \in \mathbb{K})\ (\forall\ x \in V)\ ((ab) \odot x = a \odot (b \odot x))$
   (d) $(\forall\ x \in V)\ (1 \odot x = x)$

Además, la estructura algebraica $(\mathbb{K}, +, *)$, es cuerpo si y solo si:

(i) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano;
(ii) $(\mathbb{K} - \{0\}, *)$ es un grupo abeliano y
(iii) $*$ distribuye con respecto a la $+$.

Tomando como antecedente el trabajo realizado por RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*), en Parraguez y Oktaç (2010), se presenta una *descomposición genética* que modela un posible camino mediante el cual los estudiantes pueden construir el concepto espacio vectorial. En ese trabajo se describen tanto las construcciones como los mecanismos mentales que podrían tener lugar cuando los estudiantes están aprendiendo este concepto, centrándose por un lado en la coordinación entre la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar, y por otro en la relación del esquema espacio vectorial con conceptos independencia lineal y base de un espacio vectorial.

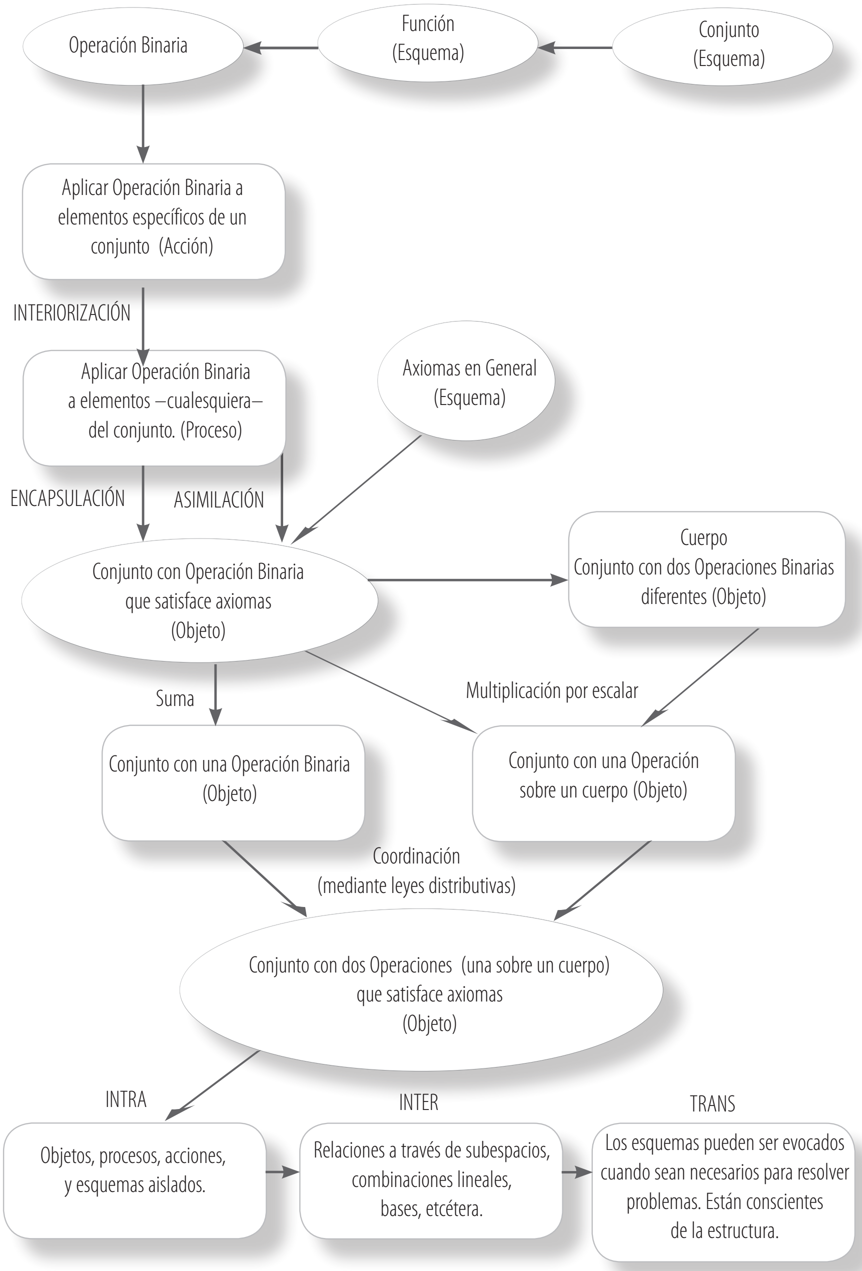


Figura 1. Descomposición genética del concepto espacio vectorial como esquema (Parraguez y Oktaç, 2010: 215)

De acuerdo a la Descomposición Genética presentada en Parraguez y Oktaç (2010) el concepto *espacio vectorial* es un esquema construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: *conjunto, operación binaria y axioma*, junto con la coordinación de los procesos que subyacen al objeto suma de vectores y al objeto multiplicación por escalar, y los axiomas que involucran la suma de vectores y la multiplicación por escalar, permitiendo emerger un nuevo objeto que puede ser llamado espacio vectorial. (Ver Figura 1).

En Parraguez y Oktaç (2010) se describe la construcción del objeto espacio vectorial; es decir, la descomposición genética que corresponde a la coordinación entre los procesos operaciones suma y multiplicación por un escalar, que junto a su axiomática definen al espacio vectorial como objeto. Los resultados de esta investigación muestran que cuando los estudiantes carecen de las construcciones descritas en la descomposición genética como prerrequisito, se hace muy difícil que desarrollen un esquema suficientemente fuerte del concepto espacio vectorial.

Con base en la descomposición genética presentada anteriormente, en este artículo se discutirá el papel que juega el cuerpo para la comprensión profunda del concepto espacio vectorial. Cuando se dice "comprensión profunda" se está pensando que las siguientes construcciones y mecanismos mentales estarían involucrados: 1) interiorizar acciones, 2) coordinar dos o más procesos de modo que los estudiantes respondan a situaciones en las que lo necesitan y 3) encapsular procesos.

Como se ha explicitado en la descomposición genética previamente presentada, es importante observar si el estudiante muestra las construcciones mentales necesarias respecto al cuerpo, y al papel que este juega en la construcción del concepto del espacio vectorial. Al respecto, es posible señalar que un cuerpo es un conjunto con dos operaciones binarias diferentes, construido de manera similar al del concepto espacio vectorial; es decir, para construir el concepto de cuerpo, un estudiante empieza por activar sus construcciones mentales acerca de los conjuntos y la operación binaria. Esto implica que el estudiante aplica una operación binaria específica a pares de elementos específicos de un conjunto, como una acción. Esto es, dados dos elementos de un conjunto específico y una operación binaria determinada, puede encontrarse el elemento resultante. Esta acción es interiorizada en un proceso que implica pensar sobre lo que la operación binaria hace a todos los elementos de un conjunto, de manera general. Después, este proceso es encapsulado en un objeto al cual el estudiante puede aplicar acciones. En este punto el objeto "conjunto con operación binaria" puede ser asimilado por el esquema de axiomas (el cual contiene cuantificadores) para dar lugar a un nuevo objeto que es un conjunto con una operación binaria que satisface axiomas. El estudiante puede verificar si todos los axiomas de grupo abeliano se satisfacen o si hay algunos que no se cumplen. Los objetos que son conjuntos con dos tipos de operaciones (suma y multiplicación) pueden ser coordinados a través de los procesos que los relacionan y los axiomas de distributividad que involucran ambas operaciones, para que emerja un nuevo objeto que puede ser llamado cuerpo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Estudiantes participantes en la investigación

Los participantes fueron diez voluntarios de la carrera de Licenciatura en Matemática de una universidad latinoamericana en Chile: seis de cuarto semestre (cursaban Álgebra Lineal 1) y cuatro de octavo semestre (cursaban Teoría Algebraica de Números).

La totalidad de ellos había cursado la asignatura Álgebra y Geometría[1]. Este es un curso inicial de Álgebra Lineal, con énfasis en las aplicaciones sobre espacios geométricos de dimensiones dos y tres, que se propone el manejo de métodos del Álgebra Lineal, tanto en el ámbito de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales como en el de problemas elementales al alcance de esos métodos. El estudiante se prepara así para un estudio más avanzado en el tópico y se provee, además, de una herramienta para el cálculo de varias variables y de una conceptuación adecuada para el estudio de la geometría y las estructuras algebraicas.

En ese curso del plan común, el concepto de espacio vectorial suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la definición de espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dicho procedimiento de explicación consiste en aclarar qué significa que $(V,+)$ tenga estructura de grupo, que $\mathbb{K}$ tenga estructura de cuerpo y que V va a ser un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, *si y solo si cumple con* las propiedades (a), (b), (c) y (d) de la página 136.

Los estudiantes que participaron en el estudio habían trabajado los contenidos básicos del Álgebra Lineal: sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Sin embargo, tomando en cuenta las

[1] **Del plan común –primer año– de las carreras de Pedagogía en Matemática y Licenciatura en Matemática.**

consideraciones expuestas arriba, esto no necesariamente implica una comprensión profunda de los conceptos involucrados.

Diseño de instrumentos para la recolección de datos

Se discutirá, con base en la descomposición genética anterior, el papel que juega el cuerpo

Para recopilar la información que permita discutir, con base en la descomposición genética realizada por Parraguez y Oktaç, el papel que juega el cuerpo para que los estudiantes logren una comprensión profunda del concepto espacio vectorial, se diseñaron entrevistas semiestructuradas de seis preguntas, en las que cada pregunta fue creada con la intención de examinar construcciones mentales específicas dispuestas en la Figura 1. En la pregunta 1:

Pregunta 1

¿$\mathbb{Z}_5^3$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?,

fue diseñada con la intención de observar si el estudiante aplica una operación binaria específica a pares de elementos específicos de un conjunto, como una acción o un proceso, para mostrar primero que $\mathbb{Z}_5$ no es un subcuerpo de $\mathbb{R}$, y en segundo lugar mostrar que $\mathbb{Z}_5^3$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Por otro lado, la Pregunta 2:

¿Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo dos elementos?

fue diseñada con el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que hace el estudiante hasta la evolución de esquema a un nivel Inter de espacio vectorial. Pero también, en esta pregunta, subyace una conexión importante, de identificar operaciones y propiedades (de la página 136), cuando cuerpo y espacio vectorial sean el mismo conjunto, en el esquema correspondiente. Esto permite observar si el estudiante muestra las construcciones necesarias respecto del cuerpo y el papel que juega el cuerpo en la definición del espacio vectorial.

Cuando el estudiante reflexiona sobre los axiomas para construir un ejemplo, significa que percibe al conjunto de axiomas como una totalidad y se da cuenta de las propiedades de la estructura llamada espacio vectorial. Esto indica que, para contestar esta pregunta, el alumno, por un lado, necesita una concepción proceso para construir ejemplos concretos de espacios vectoriales y, por otro, haber encapsulado dicho proceso para poder pensar en el cumplimiento de propiedades en aquellos ejemplos que las satisfacen. También, si el estudiante es capaz de argumentar que el espacio vectorial con dos elementos no es único;[2] es decir, si se da cuenta de que puede haber más de un espacio vectorial con dos elementos y puede dar ejemplos concretos de sus afirmaciones, se considerará que muestra una concepción objeto, ya que ha encapsulado el proceso de averiguar axiomas para que un conjunto llegue a constituir un espacio vectorial. Aunque no está incluido en la pregunta explícitamente, podría resultar útil identificar en sí mismo un cuerpo con un espacio vectorial, para mostrar los niveles de esquema. Por ejemplo, el estudiante evidenciará un nivel Inter respecto del esquema de espacio vectorial, si establece relaciones entre la estructura algebraica de un cuerpo y la estructura algebraica de un espacio vectorial, llegando a concluir que "todo cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo".

La Pregunta 3:

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ y $\mathrm{V}=\left\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{K}\right\}$ *con la suma y el producto modulo 3. ¿Es* v *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$?,

fue elaborada para mostrar cómo el estudiante encapsula el proceso de trabajar con espacios vectoriales finitos donde las operaciones que lo definen son no usuales, sobre un cuerpo finito.

[2] Otros espacios vectoriales con dos elementos sobre cuerpos distintos serían, por ejemplo:

(i) $V = \{-1,1\}$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:
Suma: $v_1 + v_2 = v_1\, v_2$, para todo $v_1\, v_2 \in V$

Multiplicación por Escalar: $\alpha \cdot v = 1$, para todo $v \in V$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $V = \{-1,1\}$ sobre $\mathbb{Z}_2$ con las operaciones:
Suma: $v_1 + v_2 = v_1\, v_2$, para todo $v_1, v_2 \in V$

Multiplicación por Escalar: $0 \cdot 1=1$, $0 \cdot (-1)=1$, $1 \cdot 1=1$, $1 \cdot (-1)=-1$

La Pregunta 4:

¿$\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$? (con las operaciones usuales, donde $\mathbb{Q}$ representa al conjunto de los números racionales),

fue diseñada para mostrar cómo el estudiante encapsula el proceso de trabajar el espacio vectorial sobre un subconjunto de él. A partir de los argumentos dados por los estudiantes, se espera tener un panorama general acerca de las construcciones mentales de los alumnos, respecto al rol que juegan el espacio vectorial y el cuerpo de los escalares, cuando hay una inclusión entre los dos conjuntos.

La Pregunta 5:

¿$\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? (con las operaciones usuales, donde $\mathbb{R}$ representa al conjunto de los números reales),

fue elaborada para mostrar cómo el estudiante desencapsula el objeto espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Consideramos que la construcción del cuerpo se da en forma paralela e implícita a la construcción del concepto espacio vectorial. Por eso utilizaremos las cinco preguntas anteriores correspondientes a la entrevista que ocupamos para documentar la descomposición genética anterior, Parraguez y Oktaç (2010), y que guardan relación con el cuerpo.

La Pregunta 6 está conformada por los siguientes incisos:

Sea $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y
$L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right) = \left\{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es una transformación lineal}\right\}$.
Se definen las siguientes operaciones:

Suma $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\left((a,b), (c,d)\right) \to \left(a + c, b + d\right)$

Multiplicación por escalar $\odot : L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(f, x) \to f \odot x = f(x)$

Si sabemos que $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ es un grupo abeliano,

a) ¿Qué axiomas faltan para que $\mathbb{R}^2$ sea un espacio vectorial sobre $L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$?, ¿se cumplen dichos axiomas?
b) ¿El conjunto $\left\{(1,0), (01)\right\}$. es linealmente independiente bajo la suma y la multiplicación por escalar definidas anteriormente?
c) Comente y justifique.

Es importante hacer notar que esta última pregunta no forma parte del grupo de preguntas diseñadas para documentar la descomposición genética de la Figura 1, sino que fue creada explícita y puntualmente para indagar con más profundidad cómo estudiantes que trabajan bien con operaciones usuales que definen al espacio vectorial y que conocen las definiciones de base de un espacio vectorial y conjuntos linealmente independientes quedan, sin embargo, atrapados en operaciones no usuales, porque no manejan la estructura de grupo y de combinación lineal que subyace a estos conceptos, donde la estructura algebraica de cuerpo como objeto forma parte importante de este andamiaje estructural; por ende, los argumentos proporcionados por los estudiantes estarían evidenciando construcciones mentales específicas relacionadas con la construcción del cuerpo.

Se debe subrayar que esa pregunta se convertirá en el objeto de observación más importante para mostrar las evidencias que dan los estudiantes, con respecto al rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial.

Análisis y verificación de datos

A partir de la descomposición genética presentada en la Figura 1, se analizan los resultados detectando qué elementos no han sido considerados o en cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente en dicha figura, se muestra el rol que juega el cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial como esquema. Esto está hecho para las construcciones mentales específicas con las que cuenta el análisis teórico, dispuesto en la Figura 1, y que son las que sustentan la construcción del concepto espacio vectorial y cuerpo: conjunto, operación binaria y axioma, como esquema.

A continuación se dan a conocer resultados de las entrevistas para ver en detalle las construcciones y mecanismos mentales que parecen estar haciendo los estudiantes en la construcción del concepto espacio vectorial, y documentar así el rol del cuerpo en la construcción. En los extractos que siguen, los estudiantes son numerados de ES1 a ES10 y el entrevistador es E.

Algunos ejemplos de la entrevista

La entrevista estuvo orientada a observar cómo y hasta dónde los estudiantes podían prestar atención a la estructura algebraica sobre la cual un espacio vectorial define sus escalares. En la pregunta 6 de la entrevista, juega un papel importante el cuerpo en el esquema de espacio vectorial. Por eso esta pregunta es relevante para documentar si el estudiante muestra las construcciones mentales necesarias respecto al cuerpo y el papel que este juega en la construcción del concepto espacio vectorial, como se ha previsto en la descomposición genética. En relación con esto, un conflicto que puede presentarse es que no le cause ningún problema al estudiante que la multiplicación por escalar está definida sobre un anillo que no es un cuerpo.

En el siguiente extracto vemos que el estudiante 5 reflexiona sobre la relación que existe entre las dos operaciones. Él fue el único de los diez estudiantes entrevistados que reflexionó sobre el conjunto donde se definen los escalares. Al respecto señaló:

[127ES5]	O sea, por lo que yo conozco, en este conjunto de las funciones lineales está… La multiplicación es la composición, o sea, por lo general, no sé si habrá otra; creo que hay otras cosas como algo de convolución, creo que me han dicho unos profesores, nunca he visto eso pero bueno… Me guío según lo básico, la suma de funciones que siempre está definida y la multiplicación no es –que sería la composición–; de hecho, hay otras cosas por ejemplo: está la… una función se multiplica con un escalar real.
[128E]	También, ¡no es cierto!
[128ES5]	Sí.
[129E]	Multiplicación por escalar.
[129ES5]	Claro, pero ahí entonces debería ser esto, debería ser un cuerpo de $L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ con la operación suma de funciones y la composición de funciones, ese es el cuerpo.

Posteriormente el ES5 comprobó uno a uno los axiomas (a), (b), (c) y (d) de la página 136, concluyendo que $\left(\mathbb{R}^2, +, \odot\right)$ es un espacio vectorial sobre $L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$.

Para mirar la dependencia lineal del conjunto $\{(1,0), (01)\}$ el ES5 recurre a la definición. Veamos un extracto de la entrevista para ver lo que sucede:

[142ES5] O sea, para ver si los vectores son linealmente independientes voy a utilizar la definición que conozco, pero con esas nuevas operaciones: $f \odot (1,0) + g \odot (0,1) = (0,0)$ y si f y g son cero, entonces el conjunto es linealmente independiente.

[143E] Me podría especificar que cero son f y g.

[143ES5] Sí. Hum... Como f y g son funciones, entonces deben ser la función nula... Pero mi problema no es ese... ¡No sé cómo seguir!

[144E] ¿Cómo?... ¿Qué quiere decir?

[144ES5] Eso. Que no sé que más hacer... Solo puedo escribir $f(1,0) + g(0,1) = (0,0)$ ...pero, según yo recuerdo, estos vectores (1,0) y (0,1) en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes, pero con otras operaciones... Pero no sé qué está pasando aquí.

Después de un rato, el ES5 le declara a la entrevistadora que no sabe cómo seguir, y es ahí donde esta interviene, diciendo lo siguiente:

[147E] ¿Podrías mirar si un solo vector es linealmente independiente?

[147ES5] A ver, lo voy a intentar con el (1,0)... Ah... Ese vector es linealmente independiente porque no es el vector nulo...

[148E] ¿Lo puedes probar?

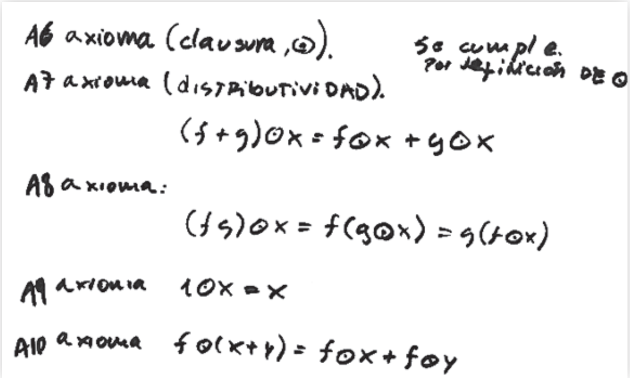
[148ES5] Eeeeee... Si hago lo mismo que antes, pero con un vector, me queda $f(1,0) = (0,0)$ ...y f es una función lineal...

[149E] ¿Qué puedes decir de eso que has escrito?

[149ES5] No sé... Porque hay varias funciones lineales que al valorarlas en (1,0) me dan (0.0)... Pero, no logro darme cuenta... ¿Qué significa?

Para el ES5, como puede observarse a partir de los diálogos anteriores, fue imposible llegar a concluir que el conjunto $\{(1,0)\}$ no es linealmente independiente y, por ende, no pudo responder lo que se preguntaba.

Con respecto a esta misma pregunta 6 de la entrevista, el resto de los estudiantes se limitó a enlistar los axiomas (ver figura 2), en relación a que $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ es un cuerpo, como fue el caso del estudiante 3:



A6 axioma (clausura, $\odot$). se cumple. Por definición DE $\odot$

A7 axioma (DISTRIBUTIVIDAD).

$$(f+g)\odot x = f\odot x + g\odot x$$

A8 axioma:

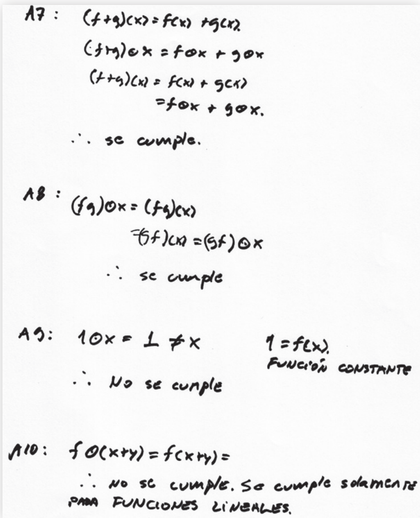
$$(fg)\odot x = f(g\odot x) = g(f\odot x)$$

A9 axioma $1\odot x = x$

A10 axioma $f\odot(x+y) = f\odot x + f\odot y$

Figura 2. Lista de axiomas que escribe el ES3

Este estudiante, posteriormente, procedió a averiguar si dichos axiomas se cumplían o no (ver figura 3), concluyendo que $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ no es un espacio vectorial sobre $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.



A7: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)\odot x = f\odot x + g\odot x$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= f\odot x + g\odot x.$

$\therefore$ se cumple.

A8: $(fg)\odot x = (fg)(x)$

$= (gf)(x) = (gf)\odot x$

$\therefore$ se cumple

A9: $1\odot x = 1 \neq x$ $\quad 1 = f(x).$ FUNCIÓN CONSTANTE

$\therefore$ No se cumple

A10: $f\odot(x+y) = f(x+y) =$

$\therefore$ no se cumple. Se cumple solamente para FUNCIONES LINEALES.

Figura 3. ES3 verificando axiomas

Y para el resto de las preguntas, el ES3 respondió y argumentó que $\{(1,0), (0,1)\}$ es linealmente independiente, porque ese conjunto es la base canónica para $\mathbb{R}^2$.

Hasta el momento se puede decir que el ES5 y el ES3 están dando evidencias de que han construido los procesos relacionados con los axiomas que contienen ambas operaciones: suma de vectores y multiplicación por escalar, pero sin reflexionar sobre los procesos suma y producto que constituyen la estructura algebraica del conjunto de los escalares.

Detengámonos aquí para considerar lo siguiente: si la estructura está definida de manera que los vectores sean los elementos de $\mathbb{R}^2$, pero los escalares pertenezcan al anillo $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, entonces no se cumple que
$(f \odot x = 0) \Leftrightarrow (f = 0 \vee x = 0)$, siendo $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y $x \in \mathbb{R}^2$.

En efecto, si consideramos $x_0 \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, entonces por *teorema de completación*[3] de la base existe $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{x_0, y\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial). Luego por el teorema fundamental del álgebra lineal existe $f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función lineal tal que $f(x_0) = 0$, pero $f(y) \neq 0$, entonces f no es la función nula.

Esto trae como consecuencia que ningún vector de $\mathbb{R}^2$ es linealmente independiente; por lo tanto, no hay base para $\mathbb{R}^2$. ¿Por qué? Porque la estructura algebraica de los escalares es un anillo que no es un cuerpo.

Otra pregunta, la número 2 de la entrevista tenía el propósito de observar algunos elementos de las construcciones mentales que tiene el estudiante, hasta la evolución de esquema a un nivel Inter de espacio vectorial.

En la entrevista con el ES4 se obtuvo lo siguiente:

[63ES4]	Es posible que exista un espacio vectorial que tenga solo dos elementos: sí.
[65E]	¿Cuál?
[64ES4]	Así como de memoria, no me acuerdo.
[66E]	Si tú dices sí, tienes que decir por qué piensas que sí. Si dices que sí, tu mente algo te está diciendo. ¿Y por qué sí?
[65ES4]	Porque entre ellos puedo hacer las operaciones.

[3] Sea V un espacio vectorial sobre K, con $dimV=n$, y un conjunto de vectores en V linealmente independiente $X=\{v_1, \ldots, v_r\}$, $r<n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n$ en V, tal que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V.

[67E]	Pues, entonces, arguméntame el sí; no importa que no sea o si no me puedes decir cuál, pero tú tienes una razón para decirme que sí, esa razón necesito conocerla.
[66ES4]	Porque entre ellos puedo hacer la operación, puedo emplear las operaciones necesarias para ser un espacio vectorial.
[68E]	Me tienes que nombrar qué operaciones estás pensando.
[67ES4]	¡Ah! Porque por ejemplo si tomo el caso de $\mathbb{R}^2$, dos elementos de $\mathbb{R}^2$, alguno en específico, entonces el cuerpo va a ser $\mathbb{R}^2$ y puedo agarrar los elementos para multiplicar de $\mathbb{R}$.
[69E]	Entonces, anota todo eso que me estás diciendo.
[68ES4]	Prefiero contárselo.
[70E]	Es que yo en la respuesta necesito el argumento, necesito ponerlo ahí, el argumento, porque todos los estudiantes dan argumentos distintos.
[69ES4]	... Necesarias para... Ah, no creo... Para...
[71E]	¿No te aventurarías a decir qué elementos tendrían que estar más o menos?
[70ES4]	¿Cuáles serían? Sí, plano, dos rectas que formen un plano.

En esta respuesta podemos apreciar *un esquema débil de conjunto*,[4] el cual es un prerrequisito en la descomposición genética, que influye negativamente en la construcción del concepto de espacio vectorial.

Otro estudiante, el ES6, piensa que no es posible tener un espacio vectorial con dos elementos, ya que uno tiene que ser el elemento identidad para la suma, y el otro elemento, sumado con el mismo, estará "fuera del conjunto". Este estudiante concluye que no es posible tener un espacio vectorial con un número finito de elementos. De acuerdo con el análisis, este estudiante tiene *un esquema de operación binaria débil*, que también es un prerrequisito; para construir el espacio vectorial como objeto, lo cual no le permite desarrollar algunas construcciones necesarias para tener un esquema de espacio vectorial fuerte,[5] sustentado en la estructura algebraica del cuerpo.

Cabe aclarar que es la totalidad de la entrevista la que da una idea de las dificultades del estudiante para darse cuenta del rol que tiene el cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial y las concepciones que muestra; sin

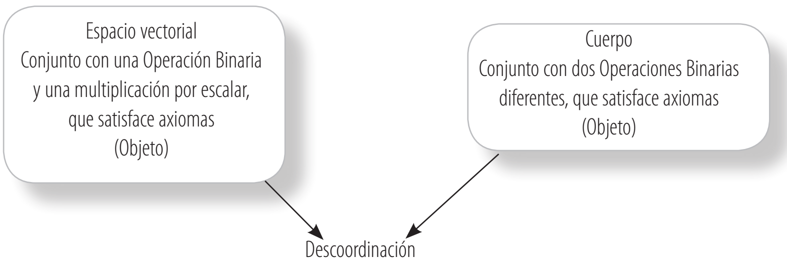
[4] El esquema de un concepto es débil, cuando la coherencia de este lo es. La coherencia entendida según Dubinsky (1991) como una herramienta mental que permite determinar si una situación matemática se puede manejar con dicho esquema o no.

[5] El esquema de un concepto es fuerte, cuando la coherencia (en el sentido de Dubinsky, 1991) lo es.

embargo, estos diez estudiantes entrevistados han dado evidencias de que no han incorporado *la razón de ser* de un cuerpo en la estructura de espacio vectorial, ya que éstos quedaron ciegos a realidades compuestas estructuralmente, como argumentar que en la pregunta 6 el conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ es linealmente dependiente.

DISCUSIÓN

El proceso de investigación, seguido de entrevistar a algunos estudiantes, ha permitido llegar a la conclusión de que no hay una valoración de la estructura de cuerpo para construir el concepto espacio vectorial. Es decir, los estudiantes muestran un desmerecimiento por indagar en este conjunto con dos operaciones binarias diferentes que satisfacen axiomas –llamado cuerpo–. Esto, aunque no se puede explicar completamente en terminología que utiliza la teoría APOE, se relaciona con una descoordinación, que se da entre los procesos que subyacen ente la concepción objeto de espacio vectorial y de cuerpo.



Prueba de ello es la afirmación que realiza el estudiante 5, para la primera parte de la pregunta 6:

[129ES5] Claro, pero ahí entonces debería ser... esto debería ser un cuerpo de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ con la operación suma de funciones y la composición de funciones, ese es el cuerpo.

En la afirmación [129ES5] el estudiante menciona y reconoce que para que $\mathbb{R}^2$ sea un espacio vectorial sobre el conjunto $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, este último "debería ser un cuerpo", y asume esto como un hecho, algo que debe ser así, razón por la cual no siente la necesidad de demostrar ni verificar, procediendo a revisar cuestiones que le parecen más importantes, como los axiomas que definen al espacio vectorial.

El ES5 fue el único de los diez entrevistados que hizo mención explícita a las operaciones que definen a $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para que llegase a conformar un cuerpo, cuestión de cumplimiento imposible, y una de las razones es que $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ con la operación compuesta de funciones no cumple la conmutatividad.

Este proceder de los estudiantes entrevistados para esta primera parte de la pregunta 6, muestra que ellos no toman conciencia de la importancia de esta estructura de cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial.

Una pregunta que se puede plantear es: ¿cómo podemos ayudar a que los estudiantes den importancia a la estructura de cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial?

Cada etapa de la descomposición genética presentada en esta investigación requiere atención para hacer las construcciones necesarias que demanda la concepción esquema del concepto espacio vectorial. Además, hay que enfrentar a los estudiantes a situaciones problemáticas que consideren operaciones suma y multiplicación por escalar diferentes a las usuales, para que ellos puedan reflexionar y analizar el porqué una estructura $(\mathbb{K}, V, \oplus, \odot)$ requiere de los axiomas:

$\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$, donde $\alpha \in \mathbb{K} \wedge v_1, v_2 \in V$
$(\alpha + \beta) \otimes v = (\alpha \otimes v) \oplus (\beta \otimes v)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V$
$(\alpha \beta) \otimes v = \alpha \otimes (\beta \otimes v)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V$

para que sus componentes:

no queden como estructuras aisladas cuando construyen el esquema del concepto de espacio vectorial.

Considerar que estas operaciones no son independientes una de la otra y analizar la razón de ser del cuerpo en cada uno de los axiomas que comprende la definición de espacio vectorial, así como también en conceptos que sustentan al álgebra lineal −como el de base de un espacio vectorial−, puede generar la reflexión de esta estructura de cuerpo para el concepto espacio vectorial, más allá de la mecanización. Evidencia de ello es que el ES5 y el ES3, a pesar de que pueden manejar las operaciones no usuales de la pregunta 6 y la definición de vectores linealmente independientes, no pueden argumentar por qué el conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ no es linealmente independiente. Este argumento solo se podría elaborar si el estudiante tuviera pleno reconocimiento del rol de esta estructura de cuerpo en la construcción del espacio vectorial.

En este camino, es importante mencionar los materiales propuestos por Weller y sus colegas (Weller *et al.*, 2002), donde el trabajo con espacios vectoriales se inicia con acciones sobre vectores específicos de espacios vectoriales de dimensión finita como $\mathbb{Z}_3^3$, sobre un cuerpo finito $\mathbb{Z}_3$.

Ahora, las nociones geométricas indudablemente están presentes en la mente de algunos estudiantes cuando piensan en el concepto espacio vectorial. Fue el caso del ES1, quien esbozó algunas transformaciones lineales de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, las cuales posteriormente declaró que no le servían, para mirar el comportamiento de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Ver Figura 4.

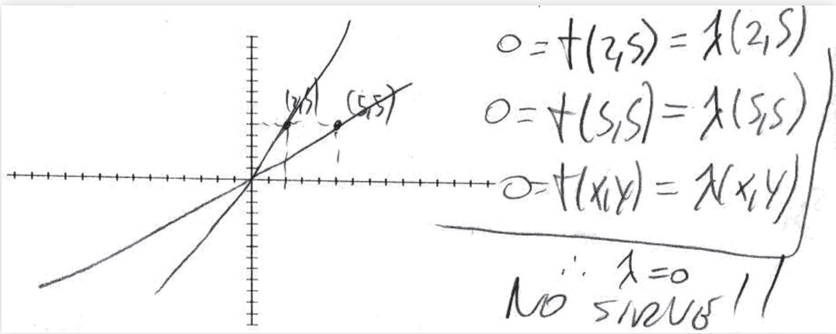


Figura 4. ES1 esbozando algunos elementos de conjunto $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Por su parte, en el problema 3, el estudiante 4 también intenta acudir a representaciones de tipo geométrico. Sin embargo, abandona sus intenciones rápidamente cuando, al parecer, este tipo de representación no le permite entrelazar los conceptos involucrados. Por lo anterior, considero de gran importancia abordar esta problemática más allá de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$; es decir, pensar en cómo estas representaciones geométricas de vectores particulares pueden contribuir con la generalización de argumentos sobre otros espacios, o cómo el uso de estas representaciones limita la construcción adecuada del concepto.

Para finalizar, quiero mencionar, en relación a la matemática de la pregunta 6 de la entrevista, que el hecho que la siguiente proposición $(f \odot x=0) \Leftrightarrow (f=0 \vee x=0)$, sea falsa para $L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ y $x \in \mathbb{R}^2$, trae como consecuencia que ningún vector de $\mathbb{R}^2$ es linealmente independiente. Esto me permite sugerir que, una de las posibles descripciones de la importancia del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial es que permite asegurar la independencia lineal de un vector, porque si un espacio vectorial está definido sobre un anillo (como fue el caso de la pregunta 6), trae como consecuencia la inexistencia de vectores linealmente independientes.

Este argumento no se encontró en las respuestas de los estudiantes entrevistados. No fue suficiente que manejaran operaciones binarias no usuales (como en la pregunta 6) y la definición de vectores linealmente independientes para abordar el rol de la estructura de cuerpo en la construcción del espacio vectorial.

Ahora, asegurar la independencia lineal de un vector es teóricamente un paso primario (a partir del *teorema de completación* de la base) para mostrar conjuntos linealmente independientes en un espacio vectorial. Y digo primario porque siempre a partir de un vector linealmente independiente se puede construir una base para el espacio vectorial donde él es linealmente independiente.

Ya que la independencia lineal es fundamental para comprender el concepto de base en un espacio vectorial, el concepto base es esencial para el teorema fundamental del álgebra lineal, el cual se refiere a la existencia de trasformaciones lineales cuando se definen en una base del espacio vectorial de partida de la transformación lineal.

Sin duda, abordar esta problemática desde su misma naturaleza abstracta[6] ofrece un campo de posibilidades para desarrollar en los estudiantes procesos

[6] V un $-\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión mayor o igual a dos y $L\left(V,V\right)=\left\{f: V \longrightarrow V / f \text{ es una transformación lineal}\right\}$ definen una estructura "de espacio vectorial", considerando como vectores los elementos de V, y como escalares las transformaciones lineales de V en V, ponderando a través de la evaluación de funciones.

de abstracción que promuevan el desarrollo de su pensamiento matemático, ya que en esta estructura se cumplen formalmente todas los axiomas de espacio vectorial (excepto, por supuesto, que los escalares sean un cuerpo), pero no existen conjuntos linealmente independientes, porque $L(V, V)$ es un anillo que no es un cuerpo.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido subvencionada por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, a través del Proyecto DI-PUCV Nº037.398/2012.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, Vol. 2, Providence: American Mathematical Society, pp. 1-32,

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. En *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3), pp. 241-309.

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. y Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. En *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (3), pp. 187-239.

Dorier J.-L., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Eds.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 105-147.

Dorier, J-L., y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning in mathematics at university level an ICMI study*. The Netherlands, Kluwer Academic Publisher, pp. 255–273.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer, pp. 95-123.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental

concepts of Group Theory. En *Educational studies in Mathematics*, 27, pp. 267-305.
Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Educación Matemática* 20 (2), pp. 65-89.
Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces. A viewpoint from APOS theory. CD–ROM *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Istambul, Turkey, Turkish Mathematical Society.
Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. En *Linear Algebra and its Applications*, 432 (8), pp. 2112- 2124.
Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York, Columbia University Press. (Obra original publicada en 1983).
Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), pp. 89-112.
Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, pp. 157-176.
Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Recuperado de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Datos de la Autora

Marcela Parraguez González
marcela.parraguez@ucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile